

**С. А. БЕРЕСТОВА  
Ю. В. ДЕНИСОВ**

# ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ИНЖЕНЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

Учебное пособие





Министерство образования и науки Российской Федерации  
Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

С. А. Берестова  
Ю. В. Денисов

# ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ИНЖЕНЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом УрФУ  
для студентов, обучающихся  
по техническим направлениям подготовки

Екатеринбург  
Издательство Уральского университета  
2016

УДК 531.312(075.8)

ББК 22.213я73

Б48

Рецензенты:

завкафедрой теоретической механики и оборудования целлюлозно-бумажных производств Уральского государственного лесотехнического университета доц., канд. физ.-мат. наук *Л. Т. Раевская*; ин-т машиноведения УрО РАН (завлабораторией системного моделирования ИМАШ УрО РАН проф., д-р техн. наук *А. Г. Залазинский*).

Научный редактор — канд. физ.-мат. наук, доц. *Т. В. Дружинина*

На обложке использована фотография с сайта <http://www.autonavigator.ru/guides/foto/Audi/Q7/none/SUV%205%20door/2015-9999/FotoID-18623.html>

**Берестова, С. А.**

Б48 Принцип Даламбера. Инженерные задачи : учебное пособие / С. А. Берестова, Ю. В. Денисов. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2016. — 92 с.

ISBN 978-5-7996-1717-2

В учебном пособии приведен принцип Даламбера для решения инженерных задач по определению ускорений и динамических реакций. Изложение ориентировано на реализацию инженерной подготовки бакалавров и магистров. Теоретический материал, представленный в необходимом объеме, иллюстрируется многочисленными примерами. Рассматривается движение реальных объектов (механизмов), постоянно используемых в инженерной практике при конструировании механизмов и их эксплуатации.

Библиогр: 8 назв. Табл. 1. Рис. 54

УДК 531.312(075.8)

ББК 22.213я73

ISBN 978-5-7996-1717-2

© Уральский федеральный университет, 2016

---

## Введение

---

**П**олученные в классической механике уравнения движения материальных объектов, а также общие теоремы динамики позволяют решать многие задачи о движении механических систем, исследовать динамику механизмов и машин.

Для исследования движения механических систем, анализа движения реальных объектов можно использовать один из принципов механики — принцип Даламбера.

Принцип Даламбера упрощает процесс составления уравнений движения, так как при этом используются простые методы статики. В этом случае уравнения движения записываются в форме уравнений равновесия. Метод кинестатики, основанный на принципе Даламбера, широко используется в динамике механизмов при проведении силового расчета и определении сил взаимодействия звеньев механизма друг на друга.

Метод, позволяющий уравнениям движения придать вид уравнений статики, Даламбер изложил в трактате «Динамика», вышедшем в свет в 1743 году. Французский ученый Ж. Даламбер (1717–1783) — механик и философ, профессор политехнической школы и член Парижской академии наук. В трактате ученый решил задачу — записать уравнения движения точки и точек системы в форме уравнений равновесия. Еще раньше этот принцип был сформирован и применялся Я. Германном и Л. Эйлером, которые работали в Петербургской академии наук, и получил название «Петербургского принципа».

Германн Я. (1678–1733) — швейцарский математик и механик; Л. Эйлер (1707–1783) — знаменитый математик, астроном и физик. За 30 лет работы в Российской академии наук Эйлер создал большое количество работ по математике, механике твердого и упругого тела, гидромеханике и небесной механике. По установившейся традиции этот принцип механики называется принципом Даламбера, хотя правильнее его было бы называть принципом Германна — Эйлера — Даламбера.

В середине XIX века в трактовке принципа было использовано понятие силы инерции материальной точки, что сделало его удобным для решения инженерных задач. Новая трактовка принципа Даламбера с использованием понятия силы инерции и является основой важного метода инженерной механики — метода кинетостатики, широко используемого при решении инженерных задач.

Рассматриваемое учебное пособие не подменяет литературу, а дополняет ее. Материал учебного пособия позволяет установить более тесную связь методов теоретической механики со специальными дисциплинами.

---

# Глава 1. Принцип Даламбера

---

## 1.1. Сила инерции материальной точки.

Приведение сил инерции точек твердого тела к простейшему виду

---

**Р**ассмотрим движущуюся материальную точку  $M$  массой  $m$  (рис. 1.1). Пусть  $\vec{a}$  — ускорение точки в инерциальной системе отсчета.

Дадим определение. *Силой инерции материальной точки называют силу, равную по модулю произведению массы точки на ее ускорение.*

Сила инерции

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}$$

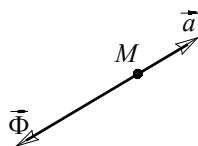


Рис. 1.1

направлена противоположно ускорению. Отметим, что сила  $\vec{\Phi}$  не приложена к движущейся точке.

Рассмотрим движущееся твердое тело, состоящее из  $n$  точек, (рис. 1.2, а)

$$\vec{\Phi}_s = -m_s \vec{a}_s \quad (s=1, 2, \dots, n).$$

Добавим к каждой точке силу инерции и получим систему сил инерции. Пусть точка  $C$  — центр масс твердого тела. С использованием метода Пуансо приведем систему сил к центру масс, заменяя силой и парой сил, (рис. 1.2, б). Главный вектор  $\vec{R}^\Phi$  и главный момент сил инерции  $\vec{M}_C^\Phi$  определяются по выражениям (1.1)

$$\vec{R}^\Phi = -M\vec{a}_C, \quad \vec{M}_C^\Phi = -\frac{d\vec{K}_C}{dt}, \quad (1.1)$$

где  $M$  — масса тела;  $\vec{a}_C$  — ускорение центра масс;  $\vec{K}_C$  — кинетический момент тела относительно центра масс ( $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с} = \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ ).

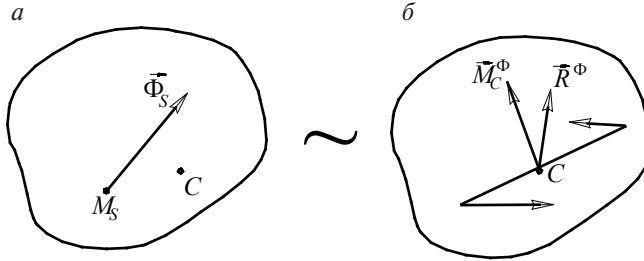


Рис. 1.2

Рассмотрим частные случаи движения тела.

1) Поступательное движение (рис. 1.3).

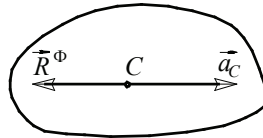


Рис. 1.3

Приняв в формуле (1.2) центр масс за центр приведения, получим

$$\vec{R}^\Phi = -M\vec{a}_C, \quad \vec{M}_C^\Phi = 0 \quad (1.2)$$

силы инерции приводятся к равнодействующей, приложенной в центре масс.

2) Вращение тела вокруг оси, перпендикулярной плоскости материальной симметрии.



а) Ось проходит через центр масс (рис. 1.4).

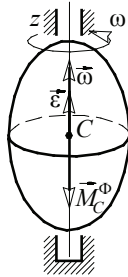


Рис. 1.4

В этом случае главный вектор и главный момент сил инерции определяются как

$$\vec{R}^\Phi = 0, \quad \vec{M}_C^\Phi = -J_{CZ} \vec{\varepsilon}, \quad (M_{CZ}^\Phi = J_{CZ} \varepsilon) \quad (1.3)$$

силы инерции приводятся к паре сил, расположенной в плоскости материальной симметрии.

В выражении (1.3)  $J_{CZ}$  — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс (центральной),  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $\varepsilon$  — угловое ускорение тела,  $\text{рад}/\text{с}^2$ .

б) Ось вращения не проходит через центр масс; приведение сил инерции к равнодействующей.

Рассмотрим вращение диска (рис 1.5).

На рис. 1.5, а в качестве центра приведения выбрана точка С;  $h$  — расстояние центра масс  $C$  до оси вращения. При этом составляющие главного вектора и главного момента имеют значение

$$R_\tau^\Phi = h m \varepsilon; \quad R_n^\Phi = h m \omega^2; \quad M_C^\Phi = J_{CZ} \varepsilon = \frac{m R^2}{2} \varepsilon,$$

где  $R$  — радиус диска;  $J_{CZ} = \frac{m R^2}{2}$ .

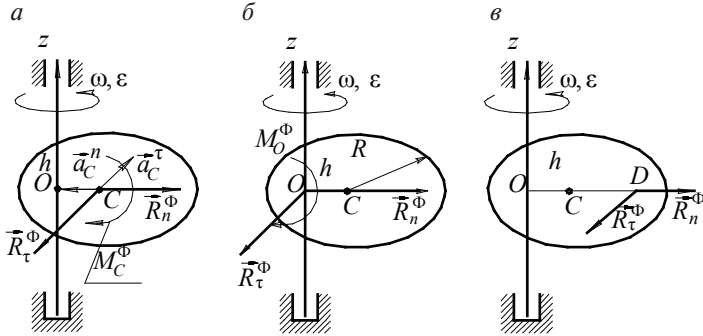


Рис. 1.5

На рис. 1.5, б в качестве центра приведения выбрана точка  $O$ . Составляющие главного вектора (в силу его инвариантности) имеют то же значение, а главный момент определяется относительно центра  $O$ .

$$R_{\tau}^{\Phi} = hm\varepsilon; \quad R_n^{\Phi} = hm\omega^2; \quad M_O^{\Phi} = J_{OZ}\varepsilon = \left( \frac{mR^2}{2} + mh^2 \right) \varepsilon,$$

где момент инерции относительно оси  $OZ$  определяется по теореме Гюйгенса.

$$J_{OZ} = J_{CZ} + mh^2 = \frac{mR^2}{2} + mh^2.$$

На рис. 1.5, в в качестве центра приведения сил инерции выбрана точка  $D$ , причем

$$OD = \frac{M_C^{\Phi}}{R_{\tau}^{\Phi}} + h = \frac{M_O^{\Phi}}{R_{\tau}^{\Phi}} = \frac{R^2}{2h} + h$$

при  $h = \frac{R}{2}$ ,  $OD = \frac{3}{2}R$ .

В этом случае силы инерции приводятся к равнодействующей, приложенной в точке  $D$ .

### 3) Плоскопараллельное движение, рис. 1.6.

Тело имеет плоскость материальной симметрии и движется параллельно этой плоскости. В этом случае силы инерции приводятся к силе  $\vec{R}^\Phi$  и паре сил с моментом  $\vec{M}_C^\Phi$ .

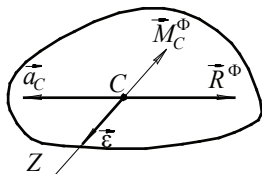


Рис. 1.6

Значение главного вектора и главного момента

$$\vec{R}^\Phi = -M\vec{a}_C, \quad \vec{M}_C^\Phi = -J_{CZ}\vec{\epsilon} \quad (M_C^\Phi = J_{CZ}\epsilon).$$

Отметим, что в этом случае плоскую систему сил инерции также можно привести к равнодействующей.

Обратим внимание на то, что при решении задач обычно вычисляют модули  $R^\Phi = Ma_C$  и  $M_C^\Phi = J_{CZ}\epsilon$ , а направление сил инерции указывают на рисунке.

## 1.2. Принцип Даламбера для точки и механической системы

---

Рассмотрим движущуюся точку (рис. 1.7, а) и добавим к точке силу инерции  $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$  (рис. 1.7, б).

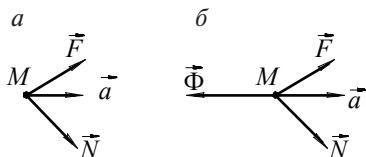


Рис. 1.7

На рис. 1.7  $\vec{F}$  — равнодействующая активных сил;  $\vec{N}$  — равнодействующая реакций связей.

Сформулируем принцип Даламбера для точки: *если к движущейся материальной точке кроме действующих на нее активных сил и реакций связей добавить силу инерции, то полученная система сил будет уравновешенной, и для нее можно составить уравнения статики.*

Математически принцип Даламбера для точки записывается в виде

$$\{\vec{F}, \vec{N}, \vec{\Phi}\} \propto 0.$$

Уравнения статики (уравнения равновесия) в векторной форме имеют вид:

в скалярной форме

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0;$$

в проекциях на декартовы оси координат

$$\sum X_S + \Phi_X = 0; \quad \sum Y_S + \Phi_Y = 0; \quad \sum Z_S + \Phi_Z = 0; \quad (1.4)$$

в проекциях на естественные оси координат

$$\sum F_{S_\tau} + \Phi_\tau = 0; \quad \sum F_{S_n} + \Phi_n = 0; \quad \sum F_{S_b} = 0. \quad (1.5)$$

В выражении (1.4)  $\Phi_X, \Phi_Y, \Phi_Z$  — проекции силы инерции на декартовы оси; в формуле (1.5)  $\Phi_\tau, \Phi_n, \Phi_b$  — проекции силы инерции на естественные оси;  $\Phi_\tau = -m \frac{dV_\tau}{dt}$ ;  $\Phi_n = -m \frac{V^2}{\rho}$ ;  $\Phi_b = 0$ .

$\Phi_\tau$  — касательная сила инерции;  $\Phi_n$  — нормальная или центробежная сила инерции.

Для плоской сил имеем два уравнения статики:  $\sum X_s + \Phi_x = 0$  ;  $\sum Y_s + \Phi_y = 0$  и соответственно  $\sum F_{s\tau} + \Phi_\tau = 0$  ,  $\sum F_{sn} + \Phi_n = 0$  .

Принцип Даламбера для механической системы состоит в следующем.

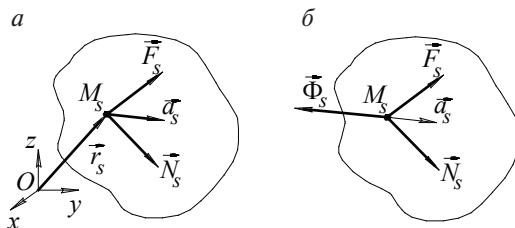


Рис. 1.8

Рассмотрим движущуюся механическую систему, состоящую из  $n$  точек (рис. 1.8, а), и покажем силы, приложенные к каждой точке. Здесь  $\vec{F}_s$  — равнодействующая активных сил;  $\vec{N}_s$  — равнодействующая реакций связей ( $s = 1, 2, \dots, n$ ). К каждой точке системы добавим силу инерции  $\vec{\Phi}_s = -m_s \vec{a}_s$  (рис. 1.8, б).

Сформулируем принцип Даламбера для механической системы:

*если к каждой точке движущейся механической системы в любой момент времени кроме действующих на нее активных сил и реакций связей добавить силу инерции, то полученная система сил будет уравновешенной, и к ней можно применять все уравнения статики.*

Математическая запись принципа Даламбера:

$$\vec{F}_s + \vec{N}_s + \vec{\Phi}_s = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n) .$$

В статике показано, что для уравновешенной системы сил главный вектор и главный момент относительно произвольно-го центра равны нулю ( $\vec{R} = 0, \vec{M}_0 = 0$ ) . Поэтому для движущейся

механической системы уравнения статики (уравнения равновесия в векторной форме) записываются следующим образом:

$$\vec{R}^F + \vec{R}^N + \vec{R}^\Phi = 0;$$

$$\vec{M}_O^F + \vec{M}_O^N + \vec{M}_O^\Phi = 0,$$

где  $\vec{R}^F, \vec{R}^N, \vec{R}^\Phi$  — главные векторы активных сил, реакций связей и сил инерции (главный вектор внутренних сил равен нулю  $\vec{R}^i = 0$ );  $\vec{M}_O^F, \vec{M}_O^N, \vec{M}_O^\Phi$  — главные моменты активных сил, реакции связей и сил инерции относительно произвольного центра (главный момент внутренних сил относительно произвольного центра равен нулю,  $\vec{M}^i = 0$ ).

Уравнение статики в скалярной форме:

— для плоской системы сил

$$\sum X_S + \sum \Phi_{SX} = 0; \sum Y_S + \sum \Phi_{SY} = 0; \sum m_0 + \sum m_0(\vec{\Phi}_S) = 0; \quad (1.6)$$

— для произвольной системы сил

$$\left. \begin{aligned} \sum X_S + \sum \Phi_{SX} = 0; \quad \sum m_X + \sum m_X(\vec{\Phi}_S) = 0; \\ \sum Y_S + \sum \Phi_{SY} = 0; \quad \sum m_Y + \sum m_Y(\vec{\Phi}_S) = 0; \\ \sum Z_S + \sum \Phi_{SZ} = 0; \quad \sum m_Z + \sum m_Z(\vec{\Phi}_S) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Отметим, что в уравнения проекций входят активные силы, реакции связей и силы инерции. Аналогично этому в уравнения моментов (относительно центра и осей) входят активные силы, реакции связей и силы инерции.

Уравнения равновесия (1.6), (1.7) можно составлять как в целом для механической системы, так и для любой ее части, применяя метод расчленения системы.

Пусть рассматривается движение одного тела под действием плоской системы сил — поступательное, вращательное или плоскопараллельное (рис. 1.9).

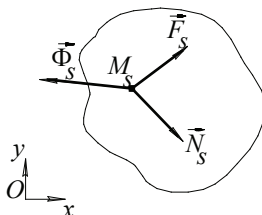


Рис. 1.9

В таком случае силы инерции приведены к простейшему виду, и в уравнениях равновесия  $\sum X_s = 0$ ,  $\sum Y_s = 0$ ,  $\sum m_0 = 0$  используются вычисленные значения главного вектора и главного момента сил инерции.

Рассмотрим использование принципа Даламбера для составления дифференциальных уравнений движения твердого тела.

### Поступательное движение

Приведение сил инерции к поступательному виду показано на рис. 1.3. Принцип Даламбера (уравнения статики) имеет вид

$$\begin{aligned}\sum F_{sx} + \sum N_{sx} + R_x^\Phi &= 0; \\ \sum F_{sy} + \sum N_{sy} + R_y^\Phi &= 0; \\ \sum F_{sz} + \sum N_{sz} + R_z^\Phi &= 0,\end{aligned}\tag{1.8}$$

$R_x^\Phi, R_y^\Phi, R_z^\Phi$  — проекции равнодействующей сил инерции на оси координат.

Уравнения (1.8) представляют собой дифференциальные уравнения поступательного движения, записанные в особой форме — форме уравнений равновесия.

### **Вращение тела вокруг оси, перпендикулярной плоскости материальной симметрии**

Ось вращения проходит через центр масс (см. рис. 1.4). Уравнение для суммы моментов относительно оси  $Z$  имеет вид

$$\sum m_Z(\vec{F}_S) + M_{CZ}^\Phi = 0. \quad (1.9)$$

Отметим, что момент опорных реакций относительно оси вращения равен нулю и опорные реакции не входят в уравнение (1.9).

Уравнение (1.9) с учетом  $M_{CZ}^\Phi = -J_Z \varepsilon$  представляет собой дифференциальное уравнение вращения тела вокруг оси, записанное в форме уравнения равновесия.

Ось вращения не проходит через центр масс (см. рис. 1.5), и уравнение моментов относительно оси  $Z$  имеет вид:

$$\text{а) } \sum m_Z(\vec{F}_S) + M_{CZ}^\Phi + m_Z(\vec{R}_i^\Phi) = 0; \quad (1.10)$$

$$\text{б) } \sum m_Z(\vec{F}_S) + M_{OZ}^\Phi = 0; \quad (1.11)$$

$$\text{в) } \sum m_Z(\vec{F}_S) + m_Z(\vec{R}_i^\Phi) = 0, \quad (1.12)$$

причем равнодействующая сил инерции приложена в точке  $D$ .

### **Плоскопараллельное движение**

Приведение сил инерции к простейшему виду показано на рис. 1.6. Принцип Даламбера (уравнения статики) записывается следующим образом:



$$\left. \begin{aligned} \sum F_{SX} + \sum N_{SX} + R_X^\Phi &= 0; \\ \sum F_{SY} + \sum N_{SY} + R_Y^\Phi &= 0; \\ \sum m_{CZ}(\bar{F}_S) + \sum m_{CZ}(\bar{N}_S) + M_{CZ}^\Phi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Уравнения (1.13) представляют собой дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения, также записанные в особой форме — уравнений равновесия. Следует подчеркнуть, в уравнения (1.8)–(1.13) не входят внутренние силы.

При решении задач с помощью принципа Даламбера можно рекомендовать следующий план действий:

- 1) выбрать движущийся объект (точка, механическая система) и изобразить его в произвольном положении;
- 2) показать активные силы и реакции связей (для механической системы — внешние силы);
- 3) добавить ко всем точкам силы инерции, приводя их к простейшему виду с учетом характера движения тел, входящих в систему. Записать модули сил инерции, указав направления на рисунке;
- 4) составить уравнения равновесия для всей системы или ее части и найти неизвестные величины.

### 1.3. Примеры использования принципа Даламбера

**Пример 1.** Принцип Даламбера для точки — конический маятник.

Материальная точка весом  $G$  прикреплена к неподвижной точке  $O$  нитью длиной  $l$ . Точка вращается по горизонтальной траектории радиусом  $r$  с постоянной скоростью  $V$  так, что нить описывает конус высотой  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$  (рис. 1.10). Определить

скорость точки М и растягивающее усилие  $N$  в нити при таком движении.

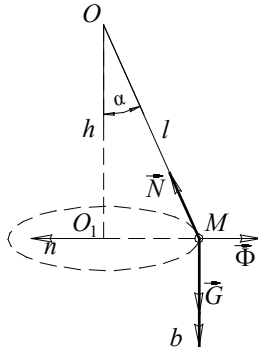


Рис. 1.10

Решение:

1) М;

2) силы  $\vec{G}$ ,  $\vec{N}$ ;

3) сила инерции  $\Phi = ma = ma_n = m \frac{V^2}{r}$  при равномерном движении точки по окружности;

4) принцип Даламбера  $\vec{G} + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0$ . Проекция на естественные оси:

$$\text{а) } N \sin \alpha - m \frac{V^2}{r} = 0;$$

$$\text{б) } -N \cos \alpha + G = 0, \text{ где } \sin \alpha = \frac{r}{l}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l},$$

$$\text{отсюда } N = \frac{Gl}{\sqrt{l^2 - r^2}}; V = r \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Такая система представляет конический маятник. Его период — время, необходимое на один полный оборот,

$T = \frac{2\pi r}{V} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$ . Для малых углов  $\alpha$  получим  $h \approx l$ , тогда пери-

од конического маятника будет таким же, как и для простого маятника.

### Пример 2. Качение цилиндра без скольжения.

Однородный цилиндр скатывается по наклонной плоскости без скольжения (рис. 1.11, а). Определить ускорение центра цилиндра, силу трения и наименьший коэффициент трения скольжения цилиндра о плоскость, при котором возможно качение без скольжения.

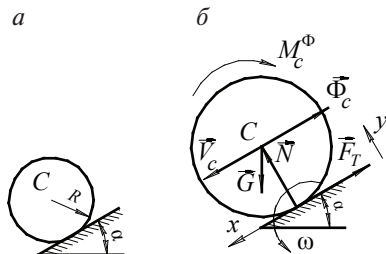


Рис. 1.11

Дано:  $\vec{G}, R, \alpha$ .

Определить:  $a_C, F_T, f_{\min}$ .

Решение:

Приведем кинематический анализ: цилиндр совершает плоское движение, точка  $P$  — мгновенный центр скоростей,

$$V_C, \omega = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_C}{R}; CP = \text{const}; a_C, \varepsilon = \frac{a_C}{CP} = \frac{a_C}{R}.$$

- 1) Цилиндр в произвольном положении (рис. 1.11, б);
- 2) внешние силы (активные и реакции связей)  $\vec{G}, \vec{N}, \vec{F}_T$ . При качении без скольжения сила трения удовлетворяет условию  $F_T \leq fN$  и является неизвестной величиной;

- 3) силы инерции, приведенные к простейшему виду при плоском движении,

$$\Phi_C = ma_C = \frac{G}{g} a_C; \quad M_C^\Phi = J_{CZ} \varepsilon = \frac{mR^2}{2} \frac{a_C}{R} = \frac{1}{2} \frac{G}{g} Ra_C,$$

где момент инерции цилиндра относительно центральной оси

$$J_{CZ} = \frac{mR^2}{2};$$

- 4) уравнения равновесия для плоской системы сил:

$$\sum X_S = 0; \quad G \sin \alpha - F_T - \frac{G}{g} a_C = 0; \quad (1.14)$$

$$\sum Y_S = 0; \quad -G \cos \alpha + N = 0;$$

$$\sum m_c = 0; \quad F_T R - M_C^\Phi = 0$$

или

$$F_T R - \frac{1}{2} \frac{G}{g} Ra_C = 0. \quad (1.15)$$

Из уравнений (1.14) и (1.15) находим ускорение центра цилиндра и силу трения скольжения  $a_C = \frac{2}{3} g \sin \alpha$ ,  $F_T = \frac{1}{3} G \sin \alpha$ .

Учитывая условие для силы трения скольжения  $F_T \leq fN$ , подставляя найденные значения  $F_T$  и  $N$ , получим  $\frac{1}{3} G \sin \alpha \leq fG \cos \alpha$  или  $f_{\min} = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha$ . Если коэффициент трения скольжения будет меньше этой величины, то цилиндр будет катиться с проскальзыванием. В этом случае  $v_C \neq R\omega$ ,  $F_T = F_{\max} = fN = fG \cos \alpha$ , где  $f$  — коэффициент трения скольжения.

Из уравнения (1.14) находим ускорение центра цилиндра

$$\frac{G}{g} a_c = G(\sin \alpha - f \cos \alpha), \text{ откуда } a_c = g(\sin \alpha - f \cos \alpha);$$

из уравнения (1.15)  $F_T R - \frac{G}{g} \frac{R^2}{2} \varepsilon = 0$  находим угловое ускорение

цилиндра при качении с проскальзыванием  $\varepsilon = \frac{2fg}{R} \cos \alpha$ .

Учтем сопротивление качению, которое возникает при скатывании цилиндра по наклонной плоскости без скольжения.

Пусть коэффициент трения качения равен  $k$ . В этом случае к действующим на цилиндр силам  $\vec{G}, \vec{F}_T, \vec{N}$  добавим пару трения качения с моментом  $m_T = kN$  (рис. 1.12).

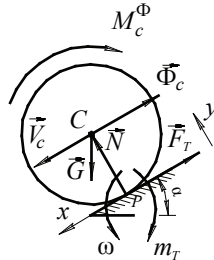


Рис. 1.12

Уравнения равновесия примут вид:

$$\sum X_s = 0; \quad G \sin \alpha - F_T - \frac{G}{g} a_c = 0; \quad (1.16)$$

$$\sum Y_s = 0; \quad -G \cos \alpha + N = 0;$$

$$\sum m_C = 0; \quad F_T R - M_C^\Phi - m_T = 0$$

или

$$F_T R - \frac{1}{2} \frac{G}{g} R a_c - k N = 0. \quad (1.17)$$

Из уравнений (1.16) и (1.17), учитывая, что  $m_T = kG \cos \alpha$ , находим ускорения центра цилиндра

$$a_c = \frac{2}{3} g \left( \sin \alpha - \frac{k}{R} \cos \alpha \right).$$

Из уравнения (1.17) находим силу трения скольжения

$$F_T = \frac{1}{3} G \left( \sin \alpha + \frac{2k}{R} \cos \alpha \right).$$

Учитывая, что качение проходит без проскальзывания,  $F_T \leq f_{\min} N$ , получим минимальное значение коэффициента трения скольжения

$$f_{\min} = \frac{1}{3} \left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{2k}{R} \right).$$

Р. С. Читателю предлагается оценить влияние трения качения (коэффициента  $k$ ) на найденные величины, учитывая, что среднее значение коэффициента  $k$  находится в пределах  $0.05 \text{ см} \leq k \leq 0.001 \text{ см}$ .

**Пример 3.** Груз массой  $m_2$ , поднимающийся с помощью каната, наматываемого на сплошной цилиндрический вал массой  $m_1$  и радиусом  $R$ , (рис. 1.13).

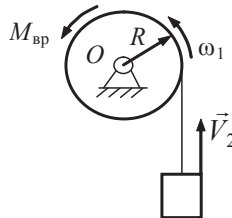


Рис. 1.13

На вал действует постоянный вращающий момент  $M_{\text{вр}}$ . Пренебрегая сопротивлением и весом каната, определить угловое ускорение вала, натяжение каната и реакции подшипника.

Вал вращается вокруг неподвижной оси; груз, который заменяем материальной точкой, движется прямолинейно. Если  $\omega_1$  — угловая скорость вала, то скорость груза  $V_2 = R\omega_1$ . Аналогично этому связаны ускорения  $a_2 = R\varepsilon_1$ .

Решение:

- 1) система: вал, канат, груз (рис. 1.14);

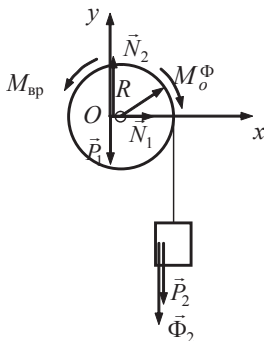


Рис. 1.14

- 2) внешние силы (активные и реакции связей):  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, M_{\text{вр}}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ . Натяжение каната будет внутренней силой для системы;
- 3) добавляемые силы инерции: для груза  $\Phi_2 = m_2 a_2 = m_2 R \varepsilon_1$ ; для вала, вращающегося вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости материальной симметрии, момент сил инерции

$$M_0^{\Phi} = I_{1Z} \varepsilon_1 = \frac{m_1 R^2}{2} \varepsilon_1, \text{ где } I_{1Z} = \frac{m_1 R^2}{2}.$$

Силы инерции точек каната равны нулю, т. к. массой канала пренебрегаем;

4) уравнения равновесия для плоской системы сил:

$$\sum X_s = 0; N_1 = 0;$$

$$\sum Y_s = 0; -P_1 - P_2 + N_2 - \Phi_2 = 0;$$

$$\sum m_0 = 0; M_{\text{вр}} - P_2 R - M_0^\Phi - \Phi_2 R = 0.$$

Подставляя значения сил инерции, находим

$$\varepsilon_1 = \frac{2(M_{\text{вр}} - m_2 g R)}{(m_1 + 2m_2)R^2}; N_1 = 0; N_2 = (m_1 + m_2)g + m_2 R \varepsilon_1.$$

Для определения натяжения каната расчленим систему и рассмотрим движения одного груза (рис. 1.15).

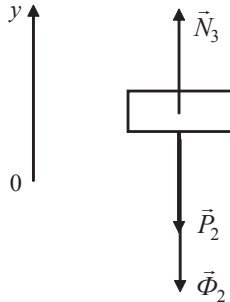


Рис. 1.15

На груз действуют силы  $\vec{P}$  и  $\vec{N}_3$ . Ускорение груза направлено вверх. Добавленная сила инерции  $\Phi_2 = m_2 a_2 = m_2 R \varepsilon_1$  направлена вниз.

Уравнение равновесия

$$\sum Y_s = 0; -P_2 + N_3 - \Phi_2 = 0; N_3 = m_2(g + R \varepsilon_1).$$



Эту задачу можно было решить другими способами: угловое ускорение  $\varepsilon_1$  найти с помощью теоремы об изменении кинетического момента или теоремы об изменении кинетической энергии, опорные реакции  $N_1$  и  $N_2$  — с помощью теоремы о движении центра масс системы,  $N_3$  — с помощью второго закона Ньютона. Принцип Даламбера дает единый метод составления уравнений движения любой механической системы. В этом заключается достоинство данного метода.

**Пример 4.** Однородный круглый диск массой  $m$  и радиусом  $R$ , вращающийся вокруг вертикальной оси под действием пары сил с моментом  $M_{вр}$ , (рис. 1.16).

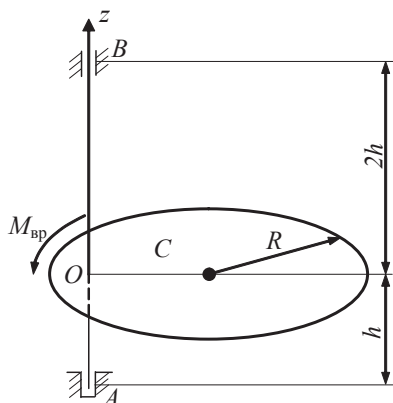


Рис. 1.16

Центр тяжести диска отстоит от оси вращения на расстоянии  $OC = a$ . Определить угловое ускорение диска, реакции подшипника  $B$  и подпятника  $A$ , если  $OB = 2h$ ,  $OA = h$ .

Решение:

- 1) диск с осью (рис. 1.17);

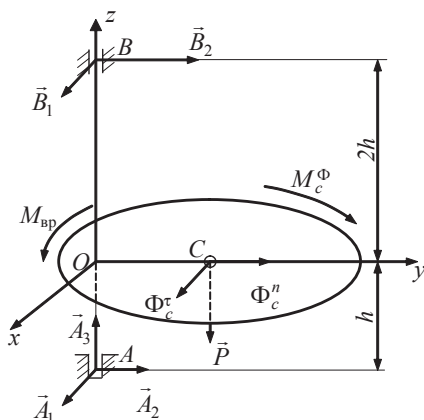


Рис. 1.17

- 2) внешние силы:  $\vec{P}$ ,  $M_{\text{вр}}$ ,  $\vec{A}_1$ ,  $\vec{A}_2$ ,  $\vec{A}_3$ ,  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{B}_2$  (система координат и опорные точки реакции связаны с вращающимся диском);
- 3) силы инерции, приведенные к центру масс: касательная составляющая главного вектора сил инерции  $\Phi_c^t = ma\varepsilon$ ; нормальная составляющая главного вектора сил инерции  $\Phi_c^n = m\omega^2$ ; главный момент сил инерции относительно

$$\text{центра масс } M_C^\Phi = I_{CZ} \varepsilon = \frac{mR^2}{2} \varepsilon;$$

- 4) уравнения равновесия для произвольной системы сил:

$$\sum X_s = 0; \quad A_1 + B_1 + \Phi_c^\tau = 0;$$

$$\sum Y_s = 0; A_2 + B_2 + \Phi_c^n = 0;$$

$$\sum Z_s = 0 ; A_3 - mg = 0 ;$$

$$\sum m_x = 0; -mga + A_2h - B_22h = 0;$$

$$\sum m_y = 0 ; -A_1 h + B_1 2h = 0 ;$$

$$\sum m_z = 0 ; M_{\text{вр}} - M_c^\Phi - \Phi_c^\tau a = 0 .$$

Подставляя значения сил инерции, находим

$$\varepsilon = \frac{2M_{\text{вр}}}{m(R^2 + 2a^2)} ;$$

$$A_1 = -\frac{2}{3}ma\varepsilon ; A_2 = \frac{ma}{3}\left(\frac{g}{h} - 2\omega^2\right) ; A_3 = mg ;$$

$$B_1 = -\frac{1}{3}ma\varepsilon ; B_2 = -\frac{ma}{3}\left(\frac{g}{h} + \omega^2\right) .$$

**Пример 5.** Тонкий однородный стержень  $OA$  массой  $m$  и длиной  $L$  вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

Определить реакцию шарнира и силу упругости пружины, при которой угол  $\alpha$  останется постоянным (рис. 1.18).

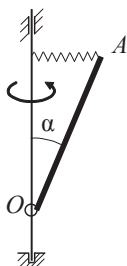


Рис. 1.18

В данной задаче основное внимание следует обратить на приведение сил инерции точек стержня к простейшему виду, учи-

тая, что масса стержня равномерно распределена по всей длине (рис. 1.19, а, б).

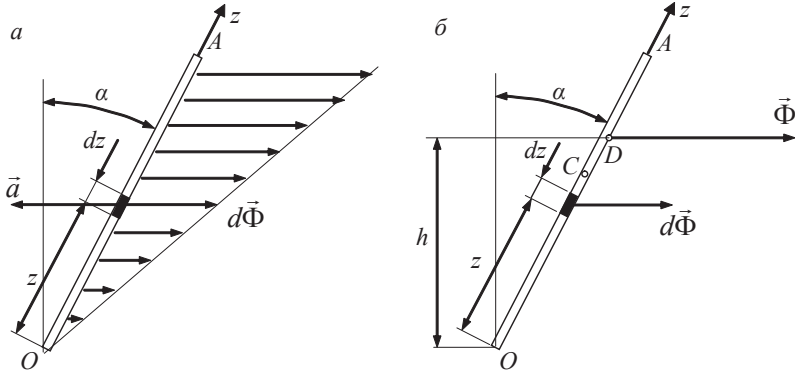


Рис. 1.19

Направим вдоль стержня ось  $z$  и выделим элементарный участок стержня  $dz$ , масса выделенного элементарного участка  $dm = \frac{P}{gl} dz$ . При равномерном вращении стержня ускорение выделенного элемента равно нормальной составляющей  $a = z \sin \alpha \omega^2$ . В таком случае элементарная сила инерции  $d\Phi = \frac{P}{gl} z \sin \alpha \omega^2 dz$ .

Нетрудно видеть, что ускорение точек стержня распределены по линейному закону, а силы инерции, приложенные к точкам стержня, представляют систему параллельных сил. Эта система сил имеет равнодействующую, равную их сумме.

Выполняя предельный переход, устремляя длину каждого элемента к нулю, а их число к бесконечности, получаем значение равнодействующей сил инерции

$$\Phi = \int d\Phi = \int_0^l \frac{P}{gl} \sin \alpha \omega^2 z dz = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \sin \alpha \omega^2.$$

Следует отметить, что ускорение центра масс стержня  $a_c = \frac{l}{2} \sin \alpha \omega^2$  и равнодействующая равна главному вектору сил инерции.

Для определения точки приложения равнодействующей сил инерции воспользуется теоремой Вариньона о моменте равнодействующей относительно точки  $O$ .

$$\Phi h = \int d\Phi z \cos \alpha, \quad (1.18)$$

где в левой части записан момент равнодействующей относительно точки  $O$ , а в правой части — сумма моментов элементарных сил инерции относительно этой же точки. Подставляя  $\Phi$  и  $d\Phi$  в выражение (1.18), получим

$$\frac{P}{g} \frac{l}{2} \sin \alpha \omega^2 h = \int_0^l \frac{P}{gl} \sin \alpha \omega^2 z^2 dz,$$

отсюда  $h = \frac{2}{3} \cos \alpha$ , т. е. равнодействующая приложена в точке  $D$  на расстоянии  $\frac{2}{3}l$  от точки  $O$ .

Дальнейшее решение задачи выполняется по рекомендованному плану:

- 1) система: стержень  $OA$  (рис. 1.20);
- 2) внешние силы:  $\vec{P}, \vec{F}_{\text{упр}}, \vec{O}_1, \vec{O}_2$ ;
- 3) сила инерции  $\Phi$ , приложенная в точке  $D$ ,

$$\Phi = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \sin \alpha \omega^2; h = \frac{2}{3} \cos \alpha;$$

- 4) уравнения равновесия для плоской системы сил:

$$\sum X_S = 0; -F_{\text{упр}} + O_1 + \Phi = 0;$$

$$\sum Y_s = 0; -P + O_2 = 0;$$

$$\sum m_0 = 0; -P \frac{l}{2} \sin \alpha + F_{\text{упр}} l \cos \alpha - \Phi \frac{2}{3} l \cos \alpha = 0. \quad (1.19)$$

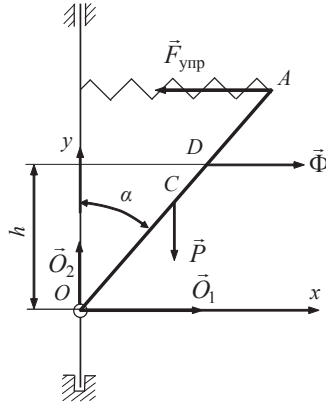


Рис. 1.20

Из уравнения (1.19) находим силу упругости:

$$F_{\text{упр}} = \frac{1}{2} P \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{3} \frac{Pl}{g} \sin \alpha \omega^2 = mg \left( \frac{1}{2 \cos \alpha} + \frac{l \omega^2}{3g} \right) \sin \alpha.$$

Составляющие реакции в точке  $O$

$$O_1 = \frac{1}{6} mg \left( \frac{3}{\cos \alpha} - \frac{l \omega^2}{g} \right) \sin \alpha, \quad O_2 = mg.$$

Рассмотренные примеры свидетельствуют о том, что с помощью принципа Даламбера наиболее просто решаются те задачи, в которых нужно найти либо реакции связей, либо ускорения движущихся точек и тел. Большая практическая ценность принципа Даламбера, или метода кинестатики, заключается в том, что, пользуясь силами инерции, можно придать уравне-

ниям динамики форму уравнений статики, что позволяет использовать при решении динамических задач простые методы статики.

**Пример 6.** Подъемный механизм (рис. 1.21). К рукоятке длиной  $b$  приложена сила  $F$ , приводящая в движение барабан 1 массой  $m_1$  и радиусом  $R_1$ . Движение от барабана 1 передается барабану 2 массой  $m_2$ . На барабан 2 намотан канат, к которому прикреплен груз 3 массой  $m_3$ .

Определить ускорение груза 3 и динамические реакции.

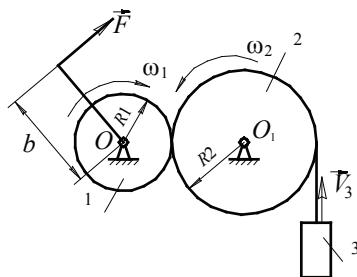


Рис. 1.21

Приведем кинематический анализ:

$$V_3; \omega_2 = \frac{V_3}{R_2}; \omega_1 = \omega_2 \frac{R_2}{R_1} = \frac{V_3}{R_1}.$$

Решение:

1) тело 1 совершает вращательное движение (рис. 1.22, а).

Момент пары сил инерции

$$M_1^\Phi = J_{12} \varepsilon_1 = \frac{m_1 R_1^2}{2} \frac{a_3}{R_1} = \frac{m_1 R_1 a_3}{2}.$$

## Уравнение равновесия

$$\Sigma m_0 = 0 ; -Fb + N_1 R_1 + M_1^\Phi = 0 .$$

$$-F \frac{b}{R_1} + N_1 + \frac{m_1 a_3}{2} = 0 ; \quad (1.20)$$

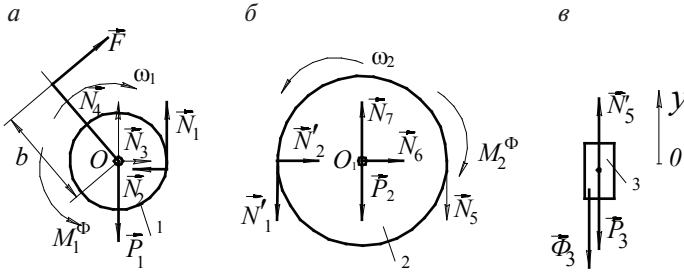


Рис. 1.22

- 2) тело 2 совершает вращательное движение (рис. 1.22, б),  
 $N_1^1 = N_1$  ;

Момент пары сил инерции:

$$M_2^\Phi = J_{22} \varepsilon_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2} \cdot \frac{a_3}{R_2} = \frac{m_2 R_2 a_3}{2} ;$$

$$\Sigma m_{0_1} = 0 ; N_1^1 R_2 - N_5 R_2 - M_2^\Phi = 0 .$$

$$N_1 - N_5 - \frac{m_2 a_3}{2} = 0 ; \quad (1.21)$$

- 3) тело 3 совершает поступательное движение (рис. 1.22, в).  
 $N_5^1 = N_5$  .

Сила инерции

$$\Phi_3 = m_3 a_3 .$$



### Уравнение равновесия

$$\begin{aligned}\sum Y_s &= 0; \quad -P_3 + N_5^1 - \Phi_3 = 0; \\ -m_3 g + N_5 - m_3 a_3 &= 0.\end{aligned}\quad (1.22)$$

Из уравнений (1.20)–(1.22) находим ускорение груза  $a_3$  и реакции  $N_1, N_5$ .

$$a_3 = \frac{2 \left( F \frac{b}{R_1} - m_3 g \right)}{m_1 + m_2 + 2m_3}.$$

$$N_1 = F \frac{b}{R_1} - \frac{1}{2} m_1 a_3.$$

$$N_5 = N_1 - \frac{m_2 a_3}{2} = F \frac{b}{R_1} - \frac{1}{2} m_1 a_3 - \frac{1}{2} m_2 a_3 = F \frac{b}{R_1} - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) a_3.$$

**Пример 7.** Груз 1 массой  $m_1$ , подвешенный к системе блоков (рис. 1.23).

Считая блоки однородными дисками массой  $m_2$  и  $m_3$ , определить ускорение груза и динамические реакции.

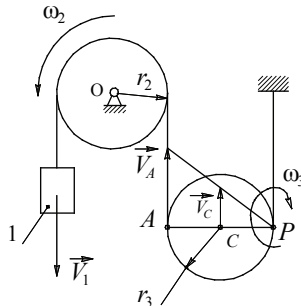


Рис. 1.23

Выполним кинематический анализ:

$$V_1, \omega_2 = \frac{V_1}{r_2}; V_A = V_1; \omega_3 = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_1}{2r_3}; V_C = CP\omega_3 = \frac{V_1}{2}.$$

1) тело 1 совершает поступательное движение (рис. 1.24, а)

$$\sum Y_S = 0; P_1 - N_1 - \Phi_1 = 0; \Phi_1 = m_1 a_1.$$

$$P_1 - N_1 - m_1 a_1 = 0; \quad (1.23)$$

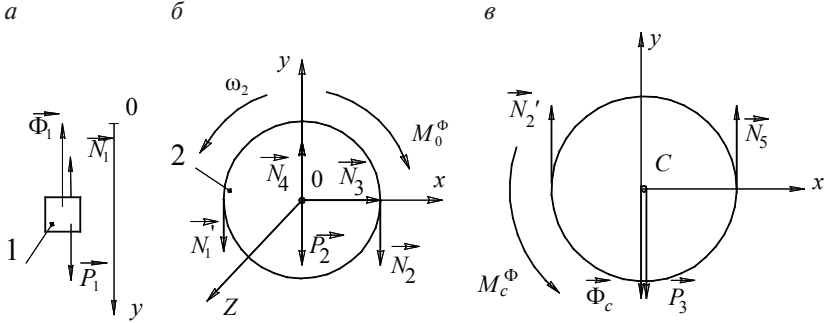


Рис. 1.24

2) тело 2 совершает вращательное движение  $N_1' = N_1$  (рис. 1.24, б)

$$M_0^\Phi = J_{2Z} \varepsilon_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2} \frac{a_1}{r_2} = \frac{m_2 r_2 a_1}{2};$$

$$\sum X_S = 0; N_3 = 0;$$

$$\sum Y_S = 0; -P_2 - N_1' - N_2 + N_4 = 0; -m_2 g - N_1 - N_2 + N_4 = 0;$$

$$\sum m_0 = 0; N_1' r_2 - N_2 r_2 - M_0^\Phi = 0;$$

$$N_1 - N_2 - \frac{m_2 a_1}{2} = 0; \quad (1.24)$$

3) тело 3 совершает плоское движение  $N'_2 = N_2$  (рис. 1.24, в)

$$\Phi_C = m_3 a_C = m_3 \frac{a_1}{2}; \quad M_C^\Phi = J_{CZ} \varepsilon_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2} \frac{a_1}{2r_3} = \frac{m_3 r_3 a_1}{4}.$$

$$\sum X_S \equiv 0.$$

$$\sum Y_S = 0; \quad -P_3 + N'_2 + N_5 - \Phi_C = 0;$$

$$-m_3 g + N_2 + N_5 - m_3 \frac{a_1}{2} = 0; \quad (1.25)$$

$$\sum m_C = 0; \quad -N'_2 r_3 + N_5 r_3 + M_C^\Phi = 0;$$

$$-N_2 + N_5 + \frac{m_3 a_1}{4} = 0. \quad (1.26)$$

Решая (1.23)–(1.26), находим ускорение груза

$$a_1 = g \frac{8m_1 - 4m_3}{8m_1 + 4m_2 + 3m_3}.$$

Из приведенных уравнений равновесия определяем динамические реакции:

$$N_1 = m_1 (g - a_1);$$

$$N_2 = m_1 g - \frac{1}{2} (2m_1 + m_2) a_1;$$

$$N_5 = m_1 g - \frac{1}{4} (4m_1 + 2m_2 + m_3) a_1;$$

$$N_4 = m_2 g + N_1 + N_2.$$

В замечании отметим достоинства принципа Даламбера:

- 1) принцип представляет единый метод составления уравнений движения всех движущихся тел;
- 2) принцип используется для вычисления ускорений и динамических реакций.

---

## Глава 2. Случаи применения принципа Даламбера

---

### 2.1. Динамические реакции подшипников при вращении тела вокруг неподвижной оси

---

**З**адача определения реакций подшипников вращающегося тела является одной из важных инженерных задач. В современных машинах угловые скорости вращающихся частей бывают значительными, динамические реакции, зависящие от них, могут быть очень большими, во много раз больше статических. Это вызывает значительную перегрузку подшипников, сокращение срока их службы, колебания фундаментов, нередко приводит к аварийным ситуациям. Для решения задач по определению реакций подшипников в инженерной практике используют принцип Даламбера.

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг вертикальной оси под действием сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , (рис. 2.1). Будем определять реакции подпятника  $A$  и подшипника  $B$ , разложив их на составляющие. Оси координат жестко свяжем с вращающимся телом. Расстояние от начала координат до точек  $A$  и  $B$  обозначим  $a$  и  $b$ .

Согласно принципу Даламбера добавим к каждой точке тела силу инерции, тогда совокупность заданных сил, реакций связей и сил инерции всех точек удовлетворяет уравнениям статики.

$$\sum X_s = 0; \sum Y_s = 0; \sum Z_s = 0; \sum m_x = 0; \sum m_y = 0; \sum m_z = 0.$$

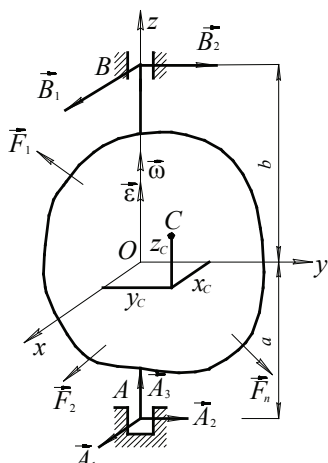


Рис. 2.1

Вычисляя проекции сил и моменты относительно осей, получаем систему уравнений для определения опорных реакций.

$$\sum X_S + A_1 + B_1 + \boxed{Mx_C \omega^2 + My_C \varepsilon} = 0; \quad (2.1)$$

$$\sum Y_S + A_2 + B_2 + \boxed{My_C \omega^2 - Mx_C \varepsilon} = 0; \quad (2.2)$$

$$\sum Z_S + A_3 = 0; \quad (2.3)$$

$$\sum m_x(\bar{F}_S) + A_2 a + B_2 b - \boxed{J_{yz} \omega^2 + J_{zx} \varepsilon} = 0; \quad (2.4)$$

$$\sum m_y(\bar{F}_S) - A_1 a + B_1 b + \boxed{J_{zx} \omega^2 + J_{yz} \varepsilon} = 0; \quad (2.5)$$

$$\sum m_z(\bar{F}_S) - J_z \varepsilon = 0. \quad (2.6)$$

Последнее уравнение есть дифференциальное уравнение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси  $Oz$ . Из остальных пяти уравнений находят динамические реакции опор.

В уравнениях (2.1)–(2.6)  $M$  — масса тела;  $x_C, y_C$  — координаты центра масс в рассматриваемой системе координат;  $J_z$  — момент инерции тела относительно оси  $z$ ,

$$J_z = \sum m_S h_S^2 ;$$

$J_{yz}, J_{zx}$  — центробежные моменты инерции тела (их определение изложено в учебниках по теоретической механике),

$$J_{yz} = \sum m_S y_S z_S ; J_{zx} = \sum m_S z_S x_S .$$

Опорные реакции имеют статические составляющие, определяемые внешними силами, и динамические составляющие, определяемые силами инерции (обведенные рамками). Динамические составляющие опорных реакций равны нулю при выполнении следующих условий:

$$x_C = 0, y_C = 0 ; \quad (2.7)$$

$$J_{yz} = 0, J_{zx} = 0 . \quad (2.8)$$

Из условий следует, что центр масс тела находится на оси вращения (формула (2.7)); ось вращения есть главная ось инерции тела для точки  $O$  (формула (2.8)). Следовательно, в случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси динамические составляющие будут равны нулю, если эта ось — главная центральная ось инерции тела. Говорят, что в таком случае силы инерции точек тела уравниваются, а само вращающееся тело уравновешено.

Если вращающееся тело не уравновешено, то в технике применяют различные способы балансировки на специальных станках для того, чтобы уравновесить силы инерции точек тела. Способы уравнивания сил инерции вращающихся тел излагаются в курсе теории механизмов и машин.

Рассмотрим некоторые случаи неуравновешенности.

**СЛУЧАЙ 1.** Центр масс тела не лежит на оси вращения, но тело имеет плоскость материальной симметрии, перпендикулярную оси вращения  $Oz$ , (рис. 2.2).

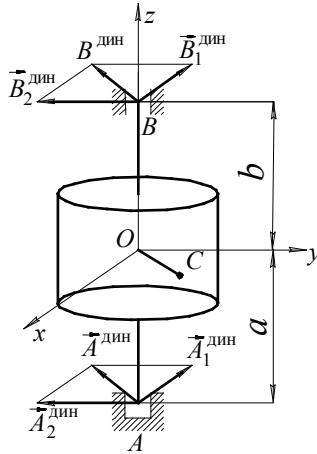


Рис. 2.2

Возьмем оси координат  $Ox$  и  $Oy$  в плоскости симметрии тела, в этой плоскости находится и центр масс тела. Покажем на рисунке лишь динамические составляющие реакций (статические составляющие, определяемые внешними силами, не учитываем).

Поскольку ось  $Oz$  — главная ось инерции тела для точки  $O$ , то  $J_{xz} = 0, J_{yz} = 0$ .

Решая систему двух уравнений (2.4), (2.5), находим

$$B_1^{\text{дин}} = \frac{a}{b} A_1^{\text{дин}}, B_2^{\text{дин}} = \frac{a}{b} A_2^{\text{дин}}.$$

**СЛУЧАЙ 2.** Центр масс лежит на оси вращения, но эта ось не является главной осью инерции тела (рис. 2.3).



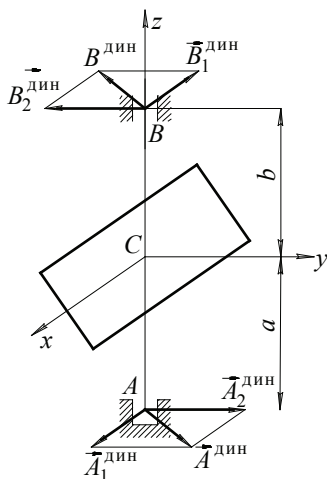


Рис. 2.3

Поскольку  $x_C = y_C = 0$ , то первые два уравнения системы обращаются в следующие:

$$A_1^{\text{дин}} + B_1^{\text{дин}} = 0,$$

$$A_2^{\text{дин}} + B_2^{\text{дин}} = 0,$$

таким образом, составляющие динамических реакций равны по модулю и направлены в противоположные стороны, поэтому и полные реакции в опорах  $A$  и  $B$  составляют пару с алгебраическим моментом, равным  $A^{\text{дин}}(a+b)$ .

$$\text{Модуль } A^{\text{дин}} = \sqrt{(A_1^{\text{дин}})^2 + (A_2^{\text{дин}})^2}.$$

Из уравнений (2.4), (2.5) системы находим

$$A_1^{\text{дин}} = \frac{1}{a+b} (J_{xz} \omega^2 + J_{yz} \varepsilon),$$

$$A_2^{\text{дин}} = \frac{1}{a+b} (-J_{xz} \varepsilon + J_{yz} \omega^2).$$

Момент реактивной пары  $M(A^{\text{дин}}, B^{\text{дин}}) = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \sqrt{J_{xz}^2 + J_{yz}^2}$ .

В рассматриваемом случае тело статически уравновешено; имеющуюся неуравновешенность называют динамической неуравновешенностью. Динамическую неуравновешенность нельзя обнаружить при помощи статических испытаний, она обнаруживается на специальных стендах и устраняется в технике приемами, описываемыми в курсе теории машин и механизмов.

Если центр масс тела не находится на оси вращения и тело не имеет плоскости материальной симметрии, то динамические реакции находятся при помощи общих уравнений.

Нужно заметить, что часто при решении конкретных задач на определение динамических реакций пользуются не уравнениями, а применяют принцип Даламбера.

**Пример 1.** Центр масс маховика, вес которого  $P$ , находится на расстоянии  $e$  от горизонтальной оси вращения. Маховик вращается с угловой скоростью  $n$  (об/мин). Маховик имеет плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения. Расстояния от подшипников  $A$  и  $B$  до плоскости симметрии равны между собой и равны  $a$ . Определить динамические составляющие реакций подшипников (рис. 2.4).

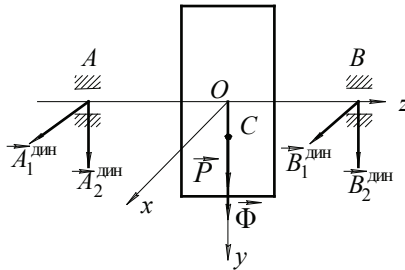


Рис. 2.4

Имеем случай статической неуравновешенности. Взяв точку  $O$  пересечения оси вращения с плоскостью симметрии за начало координат системы, жестко скрепленной с маховиком, и выбрав оси, как показано на рисунке, получим

$$x_c = 0, y_c = e, J_{xz} = 0, J_{yz} = 0.$$

Уравнения для определения реакций имеют вид:

$$A_1^{\text{дин}} + B_1^{\text{дин}} = 0,$$

$$A_2^{\text{дин}} + B_2^{\text{дин}} + Me\omega^2 = 0,$$

$$A_2^{\text{дин}} a - B_2^{\text{дин}} a = 0,$$

$$A_1^{\text{дин}} a - B_1^{\text{дин}} a = 0.$$

Решая эти уравнения, получим

$$A_1^{\text{дин}} = B_1^{\text{дин}} = 0,$$

$$A_2^{\text{дин}} = B_2^{\text{дин}} = -\frac{Me\omega^2}{2} = -\frac{Pe\pi^2 n^2}{1800g}.$$

Итак, динамические реакции оказались по модулю равными  $\frac{Pe\pi^2 n^2}{1800g}$  и, как нетрудно увидеть, непрерывно изменяющимися по направлению в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

Пусть  $P = 50$  кН,  $e = 0.5$  мм,  $n = 3600$  об/мин. Произведя вычисления, найдем для динамических реакции значения  $A_2^{\text{дин}} = B_2^{\text{дин}} = 181$  кН, что превышает статические более чем в семь раз.

**Пример 2.** Маховик малой толщиной, который можно принять за тонкий однородный диск, вращается с постоянной

угловой скоростью  $n$  (об/мин) вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр масс маховика и образующей угол  $\varphi$  с плоскостью маховика (рис. 2.5). Вес маховика  $P$ , его радиус  $R$ . Расстояния между подшипниками и центром маховика одинаковы и равны  $a$ . Определить динамические составляющие реакций в подшипниках.

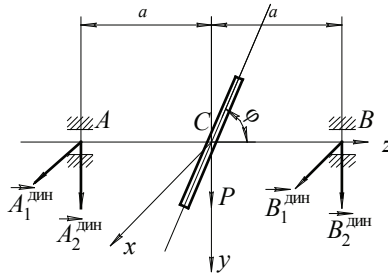


Рис. 2.5

Рассмотрим случай динамической неуравновешенности. Выберем оси координат  $C_x, C_y, C_z$ , как показано на рисунке. В таком случае координаты центра масс маховика  $x_c = y_c = z_c = 0$ ; поскольку маховик вращается равномерно, то  $\varepsilon = 0$ . Ось  $C_x$  есть ось симметрии маховика, поэтому  $J_{zx} = 0$ .

Система уравнений для определения динамических составляющих опорных реакций примет следующий вид:

$$A_1 + B_1 = 0;$$

$$A_2 + B_2 = 0;$$

$$A_2 a - B_2 a + J_{yz} \omega^2 = 0;$$

$$-A_1 a + B_1 a = 0.$$

Центробежный момент инерции  $J_{yz}$  в данном случае

$$J_{yz} = -\frac{PR^2}{8g} \sin 2\varphi.$$

Решая полученную систему, находим

$$A_1 = B_1 = 0;$$

$$A_2 = -B_2 = -\frac{PR^2}{16ga} \omega^2 \sin 2\varphi.$$

Опорные реакции в случае неуравновешенности образуют пару сил. Пусть  $P = 20$  Н,  $R = 20$  см;  $n = 12000$  об/мин;  $\varphi = 0,04$  рад;  $a = 50$  см. В итоге модуль динамических составляющих опорных реакций  $A_2 = B_2 = 1280$  Н, что превышает значение статистических составляющих реакций в 128 раз.

## 2.2. Анализ движения механической системы с двумя степенями свободы

---

Являясь универсальным методом решения инженерных задач, принцип Даламбера может быть использован для анализа движения механических систем с несколькими степенями свободы, например для анализа движения системы с двумя степенями свободы. Покажем это на примере.

**Пример 1.** Призма 2 массой  $m_2$  скользит по гладкой боковой грани призмы 1 массой  $m_1$ , образующей угол  $\alpha$  с горизонтом (рис. 2.6). Определить ускорение призмы 1, пренебрегая трением между призмой 1 и горизонтальной плоскостью.

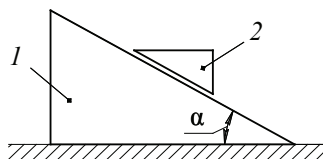


Рис. 2.6

Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы, так как положение точек системы определяется двумя независимыми координатами  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 2.7). Движение призмы 2 является сложным. Относительное движение призмы 2 определяется координатой  $x_2$ , которая является относительной (рис. 2.7). Переносным движением будет движение призмы 1, положение которой определяется координатой  $x_1$ . С учетом выбранных координат имеем ускорение призмы 1  $a_e = \ddot{x}_1$ ; переносное ускорение призмы 2  $a_e = a_1 = \ddot{x}_1$ ; относительное ускорение призмы 2  $a_r = \ddot{x}_2$ . Отметим, что относительное и переносное движение (а следовательно, и абсолютное) являются поступательными.

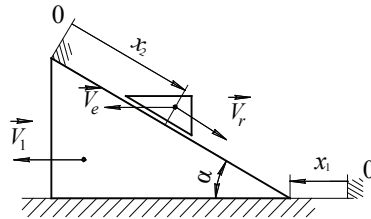


Рис. 2.7

Расчленим систему на отдельные тела, покажем для каждого тела активные силы, реакции связей и силы инерции, приведенные к простейшему виду, (рис. 2.8).

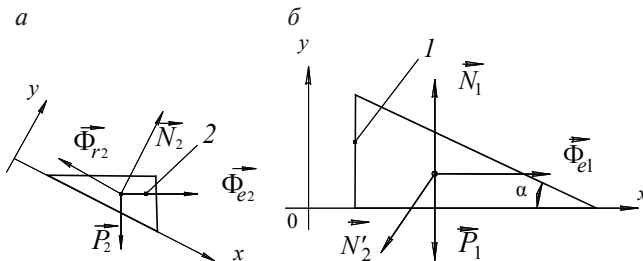


Рис. 2.8

Модули сил инерций, показанные на рис. 2.8,

$$\Phi_{e2} = m_2 a_1; \Phi_{r2} = m_2 a_r; \Phi_{e1} = m_1 a_1.$$

Применяя принцип Даламбера для призмы 2 (рис. 2.8, а), получаем

$$\sum X_S = 0; m_2 g \sin \alpha + m_2 a_1 \cos \alpha - m_2 a_r = 0; \quad (2.9)$$

$$\sum Y_S = 0; -m_2 g \cos \alpha + N_2 + m_2 a_1 \sin \alpha = 0; \quad (2.10)$$

Принцип Даламбера для призмы 1 (рис. 2.8, б):

$$\sum X_S = 0; -N_2 \sin \alpha + m_1 a_1 = 0. \quad (2.11)$$

Решая систему уравнений (2.9)–(2.11), находим ускорение призмы 1:

$$a_1 = g \frac{m_2 \sin 2\alpha}{2(m_1 + m_2 \sin^2 \alpha)}.$$

**Пример 2.** Груз 1 массой  $m_1$  с помощью нити приводит в движение каток 2 массой  $m_2$  (однородный сплошной диск) (рис. 2.9). Нить движется по гладкой поверхности, проскальзывание между катком и нитью отсутствует.

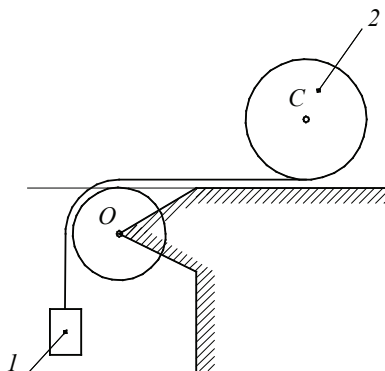


Рис. 2.9

Рассматриваемая система имеет две степени свободы, положение точек системы определяется двумя независимыми координатами  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 2.10). Движение катка по нити (относительное) определяется координатой  $x_2$ , движение нити (груза  $l$ , переносное) определяется координатой  $x_1$ .

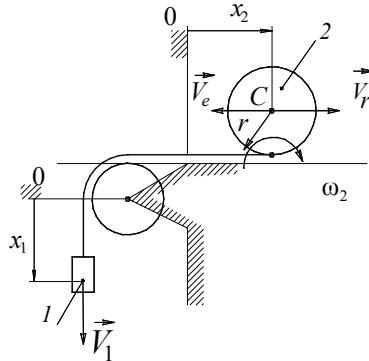


Рис. 2.10

(1 — груз; 2 — каток)

Приведем кинематические соотношения:

$$a_1 = \ddot{x}_1; \quad a_e = a_1 = \ddot{x}_1; \quad a_r = \ddot{x}_2; \quad \varepsilon_2 = \frac{\ddot{x}_2}{r}.$$

Расчленим систему на отдельные тела (каток 1, груз 2), добавим силы инерции, приводя их к простейшему виду, и применим принцип Даламбера для каждого из тел (рис. 2.11).

Модули сил инерции:

$$\Phi_1 = m_1 a_1; \quad \Phi_e = m_2 a_1; \quad \Phi_r = m_2 a_r;$$

$$M_C^\Phi = J_{CZ} \varepsilon_2 = \frac{m_2 r^2}{2} \cdot \frac{a_r}{r} = \frac{m_2 r a_r}{2}.$$



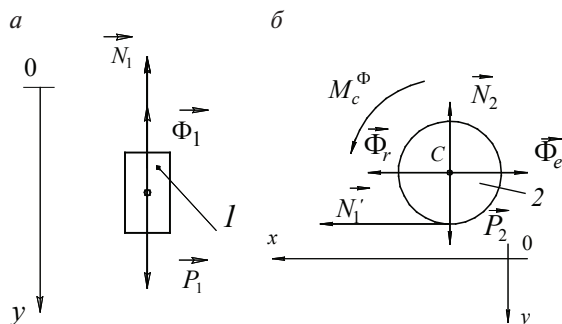


Рис. 2.11

Принцип Даламбера для тела 1 (рис. 2.11, а)

$$\sum Y_s = 0; \quad P_1 - N_1 - m_1 a_1 = 0. \quad (2.12)$$

Принцип Даламбера для тела 2 (рис. 2.11, б)

$$\sum X_s = 0; \quad N_1 + m_2 a_r - m_2 a_1 = 0; \quad (2.13)$$

$$\sum m_c = 0; \quad -N_1 r + \frac{m_2 r a_r}{2} = 0. \quad (2.14)$$

Решая уравнения (2.12)–(2.14), находим ускорение груза 1

$$a_1 = g \frac{3m_1}{3m_1 + m_2}.$$

Замечание. Подчеркивая универсальность принципа Даламбера, его важность при проведении многочисленных инженерных расчетов, отметим, что для решения примеров 1, 2 наиболее эффективно применение другого аппарата теоретической механики — уравнений Лагранжа II рода.

### 3.1. Движение автомобиля

Покажем силы инерции, приводя их к простейшему виду, (рис. 3.1).

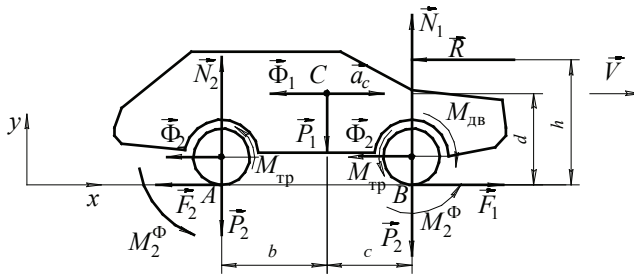


Рис. 3.1

48

$$\Phi_2 = m_2 a_C, \quad M_2^\Phi = J_{2z} \varepsilon_2 = m_2 \rho_2^2 \frac{a_C}{r},$$

где  $m_1, m_2$  — масса кузова и колеса;  $a_C$  — ускорение кузова;  $\rho_2$  — радиус инерции колеса;  $r$  — радиус колеса.

Уравнение движения кузова и колес

$$\begin{aligned} 2F_1 - 2F_2 - R - m_1 a_C - 4m_2 a_C &= 0, \\ 2F_1 - 2F_2 - R - M a_C &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $R$  — сила сопротивления (полагаем постоянной);  $M$  — масса всего автомобиля.

Уравнения вращательного движения ведущего и ведомого колес

$$F_1 r + M_{\text{тр}} - M_{\text{дв}} + m_2 \rho_2^2 \frac{a_C}{r} = 0; \quad (3.2)$$

$$-F_2 r + M_{\text{тр}} + m_2 \rho_2^2 \frac{a_C}{r} = 0. \quad (3.3)$$

Решая уравнения (3.1)–(3.3), получаем выражение для ускорения и значения сил трения при качении без скольжения

$$a_C \left( M + 4m_2 \frac{\rho_2^2}{r^2} \right) = \frac{2M_{\text{дв}}}{r} - \frac{4M_{\text{тр}}}{r} - R, \quad (3.4)$$

где  $M_{\text{дв}}$  — момент двигателя;  $M_{\text{тр}}$  — момент трения.

Силы трения находятся из выражений (3.2), (3.3).

Чтобы определить отсутствие проскальзывания, вычислим нормальные реакции  $N_1, N_2$ .

$$\sum m_A = 0:$$

$$-P_1 b - 2P_2(b+c) + 2N_1(b+c) + Rh + \Phi_1 d + 4\Phi_2 r + 4m_2 \rho_2^2 \frac{a_C}{r} = 0;$$

$$N_1 = \frac{P_1}{2} \frac{b}{b+c} + P_2 - R \frac{h}{2(b+c)} - \frac{1}{b+c} \left[ \frac{m_1}{2} d + 2m_2 \left( 1 + \frac{\rho_2^2}{r^2} \right) r \right] a_c; \quad (3.5)$$

$$\sum m_B = 0:$$

$$-2N_2(b+c) + 2P_2(b+c) + P_1c + Rh + \Phi_1 d + 4\Phi_2 r + 4m_2 \frac{\rho_2^2}{r^2} a_c = 0;$$

$$N_2 = \frac{P_1}{2} \frac{c}{b+c} + P_2 + R \frac{h}{2(b+c)} + \frac{1}{b+c} \left[ \frac{m_1}{2} d + 2m_2 \left( 1 + \frac{\rho_2^2}{r^2} \right) r \right] a_c. \quad (3.6)$$

Вычисляя величины коэффициентов трения скольжения

$$f_1 \geq \frac{F_1}{N_1}, \quad f_2 \geq \frac{F_2}{N_2},$$

получаем условия, при которых качение колес проходит без скольжения.

**Пример.** Рассмотрим движение автомобиля «Тойота-Камри 2011 модификации 2.5» при следующих значениях исходных данных:

$$M_{\text{дв}} = 224 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_{\text{тр}} = 5 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad R = 100 \text{ Н},$$

ведущие колеса передние,

$$M = 1985 \text{ кг} \quad (P = 19453 \text{ Н}); \quad m_1 = 1965 \text{ кг} \quad (P_1 = 19257 \text{ Н});$$

$$m_2 = 20 \text{ кг} \quad (P_2 = 196 \text{ Н}); \quad b = 2,8 \text{ м}; \quad c = 2,0 \text{ м}; \quad d = 0,7 \text{ м};$$

$$h = 1,2 \text{ м}; \quad r = 0,2 \text{ м}; \quad \rho_2 = 0,14 \text{ м}.$$

Выражение для ускорения (3.4):

$$a_c \left[ 1985 + 4 \cdot 20 \cdot \left( \frac{0,14}{0,2} \right)^2 \right] = \frac{2 \cdot 224}{0,2} - \frac{4 \cdot 5}{0,2} - 100; \quad a_c = 1,01 \text{ м/с}^2.$$

Значение сил трения

$$F_1 = \frac{224}{0,2} - \frac{5}{0,2} - 20 \cdot \left( \frac{0,14}{0,20} \right)^2 \cdot 1,01 = 1085,1 \text{ Н};$$

$$F_2 = \frac{5}{0,2} + 20 \cdot \left( \frac{0,14}{0,20} \right)^2 \cdot 1,01 = 34,9 \text{ Н}.$$

Нормальные реакции (3.5), (3.6)

$$N_1 = \frac{19257}{2} \cdot \frac{2,8}{4,8} + 196 - 100 \cdot \frac{1,2}{2 \cdot 4,8} - \\ - \frac{1}{4,8} \cdot \left[ \frac{1965}{2} \cdot 0,7 + 2 \cdot 20 \cdot (1 + 0,49) \cdot 0,2 \right] \cdot 1,01 = 5620,8 \text{ Н};$$

$$N_2 = \frac{19257}{2} \cdot \frac{2,0}{4,8} + 196 + 100 \cdot \frac{1,2}{2 \cdot 4,8} + \\ + \frac{1}{4,8} \cdot \left[ \frac{1965}{2} \cdot 0,7 + 2 \cdot 20 \cdot (1 + 0,49) \cdot 0,2 \right] \cdot 1,01 = 4360,9 \text{ Н}.$$

Коэффициенты трения

$$f_1 \geq \frac{1085,1}{5620,8} = 0,19; \quad f_2 \geq \frac{34,9}{4360,9} = 0,008.$$

Отсутствие проскальзывания определяется по значению коэффициента трения между ведущими колесами и поверхностью.

Рассмотрим движение автомобиля, когда между задними (ведомыми) колесами и поверхностью существует проскальзывание и  $F_2 = f_2 N_2$ . В качестве примера примем  $f_2 = 0,2$ . В этом случае для ведомого колеса момент пары сил инерции

$$M_2^\Phi = J_{2z} \varepsilon_2 = m_2 \rho_2^2 \varepsilon_2, \text{ причем } \varepsilon_2 \neq \frac{a_C}{r}.$$

Получаем следующие уравнения равновесия:  
для автомобиля в целом

$$2F_1 - 2F_2 - R - Ma_c = 0; \quad (3.7)$$

для ведущего колеса

$$F_1 r - M_{\text{дв}} + M_{\text{тр}} + m_2 \rho_2^2 \frac{a_c}{r} = 0; \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \sum m_B = 0: \quad P_1 c + 2P_2(b+c) + Rh - 2N_2(b+c) + \Phi_1 d + \\ + 4\Phi_2 r + 4m_2 \rho_2^2 \frac{a_c}{r} + 2m_2 \rho_2^2 \varepsilon_2 = 0; \end{aligned} \quad (3.9)$$

для ведомого колеса

$$-F_2 r + M_{\text{тр}} + m_2 \rho_2^2 \varepsilon_2 = 0. \quad (3.10)$$

Решая уравнения (3.7)–(3.10), учитывая  $F_2 = f_2 N_2$ , получаем систему уравнений для определения  $N_2, a_c$ .

$$\begin{aligned} P_1 c + 2P_2(b+c) + Rh - 2M_{\text{тр}} + \\ + \left[ m_1 d + 2m_2 \left( 2 + \frac{\rho_2^2}{r^2} \right) r \right] a_c - 2N_2(b+c-f_2 r) = 0, \\ \frac{2M_{\text{дв}}}{r} - \frac{2M_{\text{тр}}}{r} - R - 2f_2 N_2 - \left( M + 2m_2 \frac{\rho_2^2}{r^2} \right) a_c = 0. \end{aligned}$$

После определения  $N_2, a_c$  находим  $F_1, N_1$  и  $f_1 \geq \frac{F_1}{N_1}$  (качение ведущих колес без проскальзывания).

Расчет для «Тойота-Камри»:

$$\begin{aligned} 19\,257 \cdot 2,0 + 2 \cdot 196 \cdot 4,8 + 100 \cdot 1,2 - 2 \cdot 5 + \\ + [1965 \cdot 0,7 + 40 \cdot 2,49 \cdot 0,2] a_c - 2N_2(4,8 - 0,2 \cdot 0,2) = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{2 \cdot 224}{0,2} - \frac{2 \cdot 5}{0,2} - 100 - 2 \cdot 0,2 N_2 - (1985 + 2 \cdot 20 \cdot 0,49) a_c = 0.$$

Получаем  $a_c = 0,19 \text{ м/с}^2$ ,  $N_2 = 4282,4 \text{ Н}$ , по формуле (3.2)  $F_1 = 1093,1 \text{ Н}$ .

Выражение (3.5) пересчитываем с учетом  $M_2^\Phi = J_{2z} \varepsilon_2 = m_2 \rho_2^2 \varepsilon_2$ :

$$\begin{aligned} & -P_1 b - 2P_2(b+c) + 2N_1(b+c) + Rh + \\ & + m_1 a_c d + 4m_2 a_c r + 2m_2 \frac{\rho_2^2}{r} a_c + 2m_2 \rho_2^2 \varepsilon_2 = 0. \end{aligned}$$

Находим реакцию ведущего колеса:

$$\begin{aligned} N_1 = & \frac{P_1}{2} \frac{b}{b+c} + P_2 - \frac{R}{2} \frac{h}{b+c} - \frac{1}{b+c} \left\{ \left[ \frac{m_1}{2} d + m_2 \left( 2 + \frac{\rho_2^2}{r^2} \right) r \right] a_c \right\} - \\ & - \frac{1}{b+c} f_2 N_2 r + \frac{M_{\text{тр}}}{b+c}. \end{aligned}$$

Подставляя числовые значения, имеем

$$\begin{aligned} N_1 = & \frac{19257}{2} \cdot \frac{2,8}{4,8} + 196 - \frac{100}{2} \cdot \frac{1,2}{4,8} - \frac{1}{4,8} \cdot \left( \frac{1965}{2} 0,7 + 20 \cdot 2,49 \cdot 0,2 \right) \cdot 0,19 - \\ & - \frac{0,2 \cdot 4282,4 \cdot 0,2}{4,8} + \frac{5}{4,8} = 5737,86 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Коэффициент трения между ведущими колесами и поверхностью  $f_1 \geq \frac{F_1}{N_1} = \frac{1093,1}{5737,86} = 0,19$  практически не изменился, ког-

да качение колес проходило без проскальзывания.

Рассмотрим проскальзывание ведущих колес  $F_1 = f_1 N_1$ . Система уравнений имеет вид

$$2F_1 - 2F_2 - R - Ma_c = 0. \quad (3.11)$$

$$\sum m_A = 0: -P_1 b - 2P_2(b+c) + 2N_1(b+c) + Rh + \Phi_1 d + \\ + 4m_2 a_C r + 2m_2 \frac{\rho_2^2}{r} a_C + 2m_2 \rho_2^2 \varepsilon_2 = 0. \quad (3.12)$$

Уравнение относительного вращательного движения ведущего колеса

$$F_1 r + M_{\text{тр}} - M_{\text{дв}} + m_2 \rho_2^2 \varepsilon_2 = 0. \quad (3.13)$$

Уравнение для ведомого колеса

$$-F_2 r + M_{\text{тр}} + m_2 \rho_2^2 \frac{a_C}{r} = 0. \quad (3.14)$$

Решая уравнения (3.11)–(3.14) с учетом  $F_1 = f_1 N_1$ , получаем систему двух уравнений для определения  $N_1, a_C$

$$-P_1 b - 2P_2(b+c) + Rh + 2M_{\text{дв}} - 2M_{\text{тр}} + \left[ m_1 d + 2m_2 \left( 2 + \frac{\rho_2^2}{r^2} \right) r \right] a_C + \\ + 2N_1(b+c-f_1 r) = 0; \\ 2f_1 N_1 - \frac{2M_{\text{тр}}}{r} - R - \left( M + 2m_2 \frac{\rho_2^2}{r^2} \right) a_C = 0.$$

После определения  $N_1, a_C$  вычисляем  $F_2, N_2$  и условие  $f_2 \geq \frac{F_2}{N_2}$ . В качестве примера возьмем  $f_1 = 0,20$ . Подставляя значения величин, получаем следующую систему уравнений:

$$-55243,2 + 1395,42a_C + 9,52N_1 = 0; \\ -150 - 2004,6a_C + 0,4N_1 = 0.$$

Решая систему, получаем  $a_C = 1,05 \text{ м/с}^2$ ,  $N_1 = 5648,6 \text{ Н}$ .



Интересно отметить, что принятое значение коэффициента трения скольжения довольно мало отличается от найденного при отсутствии проскальзывания ( $f_1 \geq 0,19$ ) и полученное значение ускорения  $a_c = 1,05 \text{ м/с}^2$  достаточно близко к найденному без скольжения  $a_c = 1,01 \text{ м/с}^2$ . Коэффициент трения между ведомыми колесами в этом случае также невелик,  $f_2 \geq 0,009$ , и основную роль играет трение между ведущими колесами и поверхностью дорожного покрытия.

Приведенные расчеты представляют не только теоретический интерес, но и имеют некоторое практическое применение в части возможной потери устойчивости (определение ускорения) при ускоренном подъеме и замедленном опускании автомобиля по наклонной плоскости.

Рассмотрим определение ускорения, при котором возможно опрокидывание автомобиля при ускоренном подъеме (рис. 3.2).

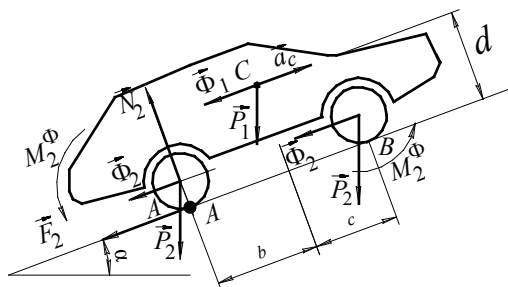


Рис. 3.2

Составляя сумму моментов относительно точки A, получаем

$$\begin{aligned} \sum m_A = 0: \\ -P_1 \cos \alpha b + P_1 \sin \alpha d + 4P_2 \sin \alpha r - 2P_2 \cos \alpha (b+c) + 4\Phi_2 r + \Phi_1 d + \\ + 4m_2 \rho_2^2 \frac{a_c}{r} = 0. \end{aligned}$$

Подставляя значения сил инерции, получаем уравнение для определения ускорения

$$a_c \left[ m_1 d + 4m_2 \left( 1 + \frac{\rho_2^2}{r^2} \right) r \right] = \\ = P_1 (\cos \alpha b - \sin \alpha d) + 2P_2 [\cos \alpha (b + c) - 2 \sin \alpha r].$$

Значение ускорения существенно зависит от угла  $\alpha$ . Например, при  $\alpha = 60^\circ$   $a_c = 11,2 \text{ м/с}^2$ , при  $\alpha = 75^\circ$ ,  $a_c = 0,6 \text{ м/с}^2$ .

Потеря устойчивости (опрокидывание) может иметь место при замедленном движении по наклонной плоскости (рис. 3.3).

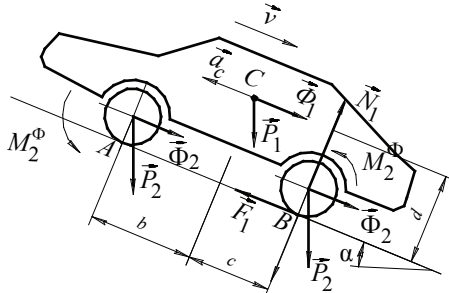


Рис. 3.3

Составляя сумму моментов относительно точки  $B$ , получаем

$$\sum m_B = 0. \\ + P_1 \cos \alpha c - P_1 \sin \alpha d - 4P_2 \sin \alpha r + 2P_2 \cos \alpha (b + c) - m_1 a_c d - \\ - 4m_2 a_c r - 4m_2 \rho_2^2 \frac{a_c}{r} = 0.$$

Уравнение для определения ускорения

$$a_c \left[ m_1 d + 4m_2 \left( 1 + \frac{\rho_2^2}{r^2} \right) r \right] = \\ = P_1 (\cos \alpha c - \sin \alpha d) + 2P_2 [\cos \alpha (b + c) - 2 \sin \alpha r].$$

В этом случае ускорение также зависит от угла  $\alpha$ , при  $\alpha = 60$   $a_c = 5,6 \text{ м/с}^2$ .

Опасность потери устойчивости (опрокидывания) подстерегает автомобиль в верхней точке моста при равномерном движении по выпуклому мосту (рис. 3.4).

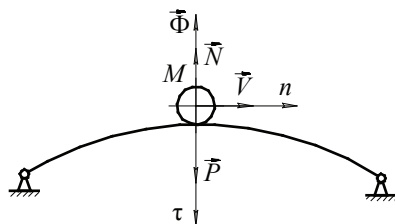


Рис. 3.4

Так, если автомобиль заменить материальной точкой, то при  $V^2 / \rho = g$  в верхней точке моста произойдет опрокидывание автомобиля. При  $V = 90 \text{ км/ч}$  и  $\rho = 62,5 \text{ м}$  произойдет опрокидывание автомобиля.

$$\Phi = \frac{mV^2}{\rho};$$

$$\sum F_{S\tau} = 0;$$

$$mg - N - \frac{mv^2}{\rho} = 0;$$

$$N = m \left( g - \frac{V^2}{\rho} \right).$$

### 3.2. Качение колеса по криволинейной поверхности, влияние неровности дороги

Колесо весом  $G$  движется с постоянной скоростью  $V$  вдоль горизонтальной оси  $x$  (рис. 3.5). Какое влияние на давление между колесом и дорогой окажет небольшое углубление на пути колеса, если форма этого углубления задана уравнением  $y = \frac{\delta}{2}(1 - \cos \frac{2\pi x}{l})$ ?

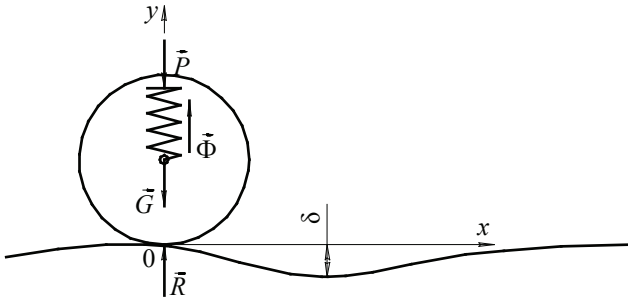


Рис. 3.5

Примем, что обод колеса и дорога абсолютно жесткие,  $\bar{P}$  — сила создаваемая пружиной, прижимающая колесо к дороге.

При попадании колеса в углубление возникает вертикальное ускорение  $\ddot{y}$ .

Вычислим вертикальные составляющие скорости и ускорения:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = V \frac{dy}{dx} = V \frac{\delta \pi}{l} \sin \frac{2\pi x}{l};$$

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d\dot{y}}{dx} \frac{dx}{dt} = V \frac{d\dot{y}}{dx} = \frac{2\pi^2}{l^2} V^2 \delta \cos \frac{2\pi x}{l}.$$

Проекция силы инерции колеса на ось  $y$

$$\Phi_y = \frac{G}{g} \ddot{y} = \frac{G}{g} \frac{2\pi^2}{l^2} V^2 \delta \cos \frac{2\pi x}{l}.$$

Используем принцип Даламбера и составим сумму проекций сил на ось  $OY$ :

$$\sum Y_S = 0; \quad -G - P + R + \Phi_y = 0;$$

$$R = P + G - \frac{G}{g} \ddot{y} = P + G - \frac{G}{g} \frac{2\pi^2}{l^2} V^2 \delta \cos \frac{2\pi x}{l};$$

$$R = P + G \left( 1 - \frac{2\pi^2}{gl^2} V^2 \delta \cos \frac{2\pi x}{l} \right).$$

При  $x=0 \quad \cos \frac{2\pi x}{l} = 1, R \Rightarrow R_{\min};$

$$R_{\min} = P + G \left( 1 - \frac{2\pi^2}{gl^2} V^2 \delta \right).$$

Можно найти скорость  $V$ , когда колесо будет следовать по контуру углубления при  $P=0$ . Значение скорости  $\frac{2\pi^2}{gl^2} V^2 \delta < 1$ .

При  $x = \frac{l}{2} \quad \cos \frac{2\pi x}{l} = -1$

$$R_{\max} = P + G \left( 1 + \frac{2\pi^2}{gl^2} V^2 \delta \right).$$

Пусть  $\delta = 0,5$  см;  $l = 100$  см;  $V = 30$  м/с;

$$R_{\max} = P + G \left( 1 + \frac{2 \cdot 3,14^2}{980 \cdot 100^2} \cdot 30^2 \cdot 100^2 \cdot 0,5 \right) = P + G(1 + 9,05).$$

Полученный результат свидетельствует о том, что максимальное давление существенно увеличивается вследствие даже небольшого опущения дороги  $\delta = 0,5$  см.

Для уменьшения максимального давления можно рекомендовать следующее:

1) уменьшить вес колес; 2) установить рессоры между осями колес и корпусом; 3) установить на колесо упругий обод и увеличить упругость дороги.

### 3.3. Лебедка для подъема груза.

#### Определение ускорения груза, динамических реакций

Для вертикального перемещения груза 1 (рис. 3.6) используется грузоподъемное устройство (лебедка). Горизонтальный вал 2 с насаженным барабаном 3 приводится в движение посредством ременной передачи, которая соединяет барабан со шкивом 4, соединенным с валом двигателя. Масса груза 1  $m_1$ , масса вала 2  $m_2$ , его радиус  $R_2$  (вал — однородный круглый цилиндр), масса барабана 3  $m_3$ , его радиус  $R_3$  (однородный круглый диск), масса шкива 4  $m_4$ , радиус  $R_4$  (однородный круглый диск).  $M_{вр}$  — вращающий момент двигателя;  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$  — известные геометрические размеры; 5, 6 — ведущая и ведомая ветви ремня, причем натяжение ведущей ветви в два раза больше натяжения ведомой (устанавливается экспериментально и может иметь другое значение);  $\alpha_1, \alpha_2$  — углы наклона ведущей и ведомой ветвей ремня;  $h$  — высота подъема груза 1.

Для инженерных задач представляет большой практический интерес:

- 1) рассмотрение режимов подъема и опускания груза;
- 2) анализ равномерного и неравномерного движения груза;

3) движение груза при внезапном защемлении верхнего конца каната и дальнейшем опускании груза;

4) определение реакции подшипников, определяющей их долговечность при различных режимах работы.

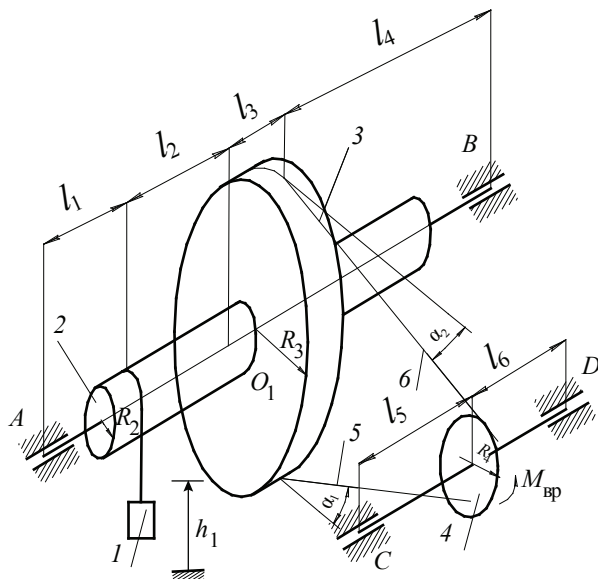


Рис. 3.6

Рассмотрим режим подъема (рис. 3.7).

Кинематический анализ состоит в следующем:

$$V_1; \quad \omega_2 = \omega_3 = \frac{V_1}{R_2}; \quad \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{R_4}{R_3}; \quad \omega_4 = \frac{V_1}{R_2} \frac{R_3}{R_4}.$$

Покажем силы инерции для вала с барабаном 3 (рис. 3.8, а) и шкива (3.8, б):

$$\Phi_1 = m_1 a_1; \quad M_2^\Phi = J_{2z} \varepsilon_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2} \frac{a_1}{R_2} = \frac{m_2 a_1 R_2}{2};$$

$$M_3^\Phi = J_{3z} \varepsilon_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2} \frac{a_1}{R_2} = \frac{m_3}{2} \left( \frac{R_3}{R_2} \right) R_3 a_1;$$

$$M_4^\Phi = J_{4z} \varepsilon_4 = \frac{m_4 R_4^2}{2} \frac{a_1}{R_2} \frac{R_3}{R_4} = \frac{m_4}{2} \left( \frac{R_3}{R_2} \right) R_4 a_1.$$

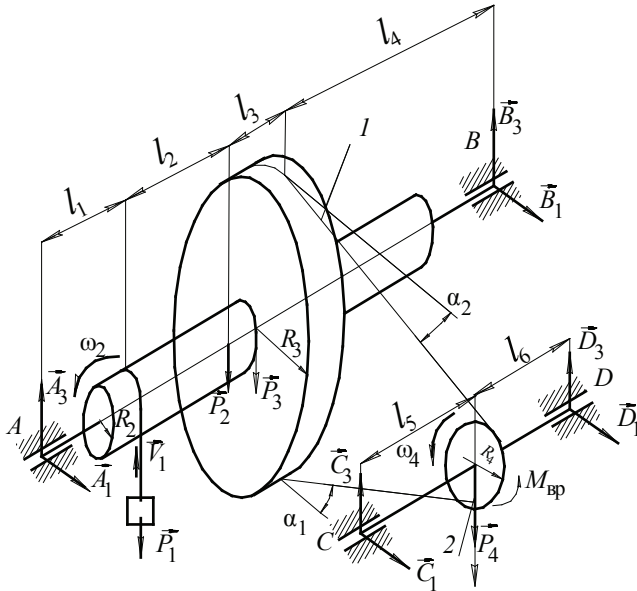


Рис. 3.7

(1 — барабан; 2 — шкив)

Рассмотрим вал с барабаном и составим сумму моментов относительно оси  $Ay$ :

$$\sum m_y = 0; \quad P_1 R_2 - T_1 R_3 + T_2 R_3 + \Phi_1 R_2 + M_2^\Phi + M_3^\Phi = 0.$$





$$P_1 - T_2 \left( \frac{R_3}{R_2} \right) + m_1 a_1 + \frac{1}{2} m_2 a_1 + \frac{1}{2} m_3 \left( \frac{R_3}{R_2} \right)^2 a_1 = 0. \quad (3.15)$$

Рассмотрим шкив (рис. 3.8, б), составим сумму моментов относительно оси  $CY$

$$\sum m_y = 0; \quad -M_{\text{вр}} + T'_1 R_4 - T'_2 R_4 + M_4^{\Phi} = 0.$$

С учетом значения сил инерции получаем

$$\begin{aligned} -M_{\text{вр}} + T_2 R_4 + \frac{1}{2} m_4 \left( \frac{R_3}{R_2} \right) R_4 a_1 &= 0; \\ -M_{\text{вр}} \frac{1}{R_4} + T_2 + \frac{1}{2} m_4 \left( \frac{R_3}{R_2} \right) a_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Решая совместно (3.15), (3.16) и вводя обозначения

$$Q = M_{\text{вр}} \frac{R_3}{R_2 R_4} - P_1 = M_{\text{вр}} \frac{R_3}{R_2 R_4} - m_1 g;$$

$$m_{\text{пр}} = \frac{1}{2} \left[ 2m_1 + m_2 + (m_3 + m_4) \left( \frac{R_3}{R_2} \right)^2 \right],$$

получаем значение для ускорения груза

$$a_1 = \frac{Q}{m_{\text{пр}}}.$$

Условие равномерного движения груза:

$$M_{\text{вр}} \frac{R_3}{R_2 R_4} - m_1 g = 0;$$

$$M_{\text{вр}} = m_1 g \frac{R_2 R_4}{R_3}.$$

Определение скорости с использованием подстановки:

$$m_{\text{пр}} \frac{dV_1}{dx} \frac{dx}{dt} = Q;$$

$$m_{\text{пр}} V_1 \frac{dV_1}{dx} = Q; \quad m_{\text{пр}} \frac{V_1^2}{2} = Q h_1;$$

$$V_1 = \sqrt{2 \frac{Q}{m_{\text{пр}}} h_1}.$$

Определение натяжений ремня с использованием уравнения (3.16):

$$T_2 = M_{\text{вр}} \frac{1}{R_4} - \frac{1}{2} m_4 \left( \frac{R_3}{R_2} \right) a_1;$$

$$T_1 = 2T_2 = 2M_{\text{вр}} \frac{1}{R_4} - m_4 \left( \frac{R_3}{R_2} \right) a_1.$$

При равномерном подъеме груза его ускорение  $a_1 = 0$ . В этом случае натяжение ведомой ветви

$$T_2 = M_{\text{вр}} \frac{1}{R_4} = m_1 g \frac{R_2}{R_3}.$$

Определение динамических опорных реакций подшипников состоит в следующем.

Рассмотрим вал с барабаном и составим уравнения равновесия:

$$\sum X_S = 0. \quad A_1 + T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2 + B_1 = 0; \quad (3.17)$$

$$\sum Z_S = 0. \quad A_3 - P_1 - P_2 - P_3 + T_1 \sin \alpha_1 - T_2 \sin \alpha_2 + B_3 - \Phi_1 = 0; \quad (3.18)$$

$$\sum m_X = 0. \quad -P_1 l_1 - P_2(l_1 + l_2) - P_3(l_1 + l_2 + l_3) + T_1 \sin \alpha_1 (l_1 + l_2 + l_3) - T_2 \sin \alpha_2 (l_1 + l_2 + l_3) + B_3(l_1 + l_2 + l_3 + l_4) - \Phi_1 l_1 = 0; \quad (3.19)$$

$$\sum m_z = 0. -T_1 \cos \alpha_1 (l_1 + l_2 + l_3) - T_2 \cos \alpha_2 (l_1 + l_2 + l_3) - B_1 (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) = 0. \quad (3.20)$$

Из уравнений (3.17)–(3.20) определяются динамические реакции  $A_1, A_3, B_1, B_3$ , которые можно сравнить с их статическими значениями.

Режим опускания груза (рис. 3.9) состоит в следующем.

Введем обозначение  $M_{\text{вп}} = M_C$ , где  $M_C$  — момент двигателя, и сохраним  $T_1 = 2T_2$ .

Рассмотрим движение вала с барабаном (рис. 3.9, а):

$$\begin{aligned} \sum m_y = 0; \quad P_1 R_2 - T_1 R_3 + T_2 R_3 - \Phi_1 R_2 - M_2^\Phi - M_3^\Phi = 0; \\ P_1 R_2 - T_1 R_3 + T_2 R_3 - m_1 a_1 R_2 - \frac{1}{2} m_2 a_1 R_2 - \frac{1}{2} m_3 \left( \frac{R_3}{R_2} \right) R_3 a_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Рассмотрим движение шкива (рис. 3.9, б):

$$\begin{aligned} \sum m_y = 0; \quad -M_{\text{сопр}} + T_1 R_4 - T_2 R_4 - M_4^\Phi = 0; \\ -\frac{M_{\text{сопр}}}{R_4} \frac{R_3}{R_2} + T_2 \frac{R_3}{R_2} - \frac{1}{2} m_4 \left( \frac{R_3}{R_2} \right)^2 a_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

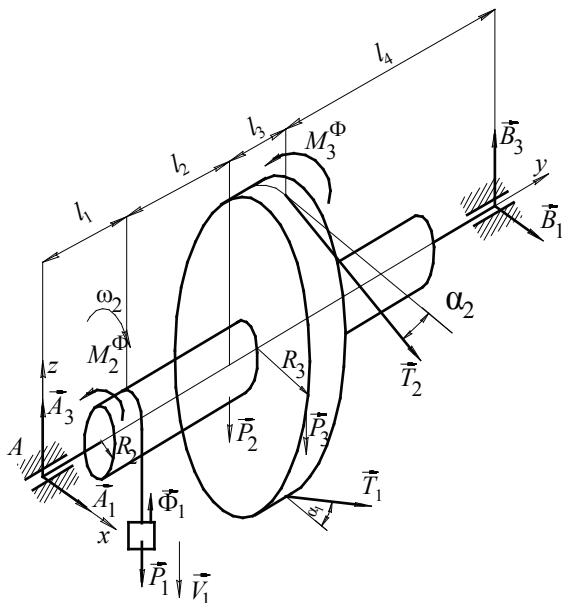
Введем обозначения из уравнений (3.21), (3.22)

$$\begin{aligned} Q_1 = P_1 - M_{\text{сопр}} \frac{R_3}{R_2 R_4}; \\ m_{\text{np}} = \frac{1}{2} \left[ 2m_1 + m_2 + (m_3 + m_4) \left( \frac{R_3}{R_2} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

получаем значение для ускорения груза  $a_1$

$$a_1 = \frac{Q_1}{m_{\text{np}}}.$$

а



б

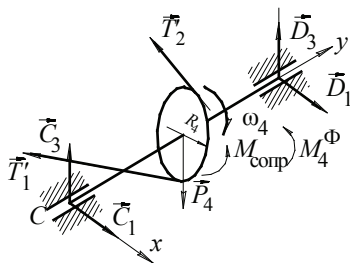


Рис. 3.9

Если  $P_1 - M_{\text{сопр}} \frac{R_3}{R_2 R_4} = 0$ , то  $a_1 = 0$  и груз движется равномерно,

тогда

$$T_2 = \frac{M_{\text{сопр}}}{R_4}.$$

При неравномерном опускании груза из выражения (3.21) находим натяжение ветвей ремня.

$$T_2 = P_1 \frac{R_2}{R_3} - \frac{R_2}{R_3} m_{\text{пр}} a_1 + \frac{1}{2} m_4 \left( \frac{R_3}{R_2} \right) a_1; \quad T_1 = 2T_2.$$

$$\text{Если } a_1 = \frac{2m_1}{2m_1 + m_2 + m_3 \left( \frac{R_3}{R_2} \right)^2} g, \text{ то реакция } T_2 = 0, \text{ где } T_2 — \text{яв-}$$

ление вибрации.

Рассмотрим реакции при опускании груза и защемлении верхнего конца каната.

При опускании груза со скоростью  $V$  и защемлении верхнего конца каната максимальное натяжение троса, удерживающего груз, составит

$$F_{\max} = m_1 g + V \sqrt{C m_1},$$

где  $C$  — коэффициент жесткости каната.

Коэффициент динамичности в этом случае

$$K_{\text{д}} = \frac{F_{\max}}{m_1 g} = 1 + \frac{V \sqrt{C m_1}}{m_1 g} = 1 + \frac{V}{g} \sqrt{\frac{C}{m_1}},$$

$$K_{\text{д}} \approx 20.$$

Рассмотрим определение опорных реакций при равномерном опускании груза и  $T_1 = 2T_2$  (рис. 3.10).

Уравнение равновесия:

$$\sum X_S = 0; \quad A_1 + T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2 + B_1 = 0;$$

$$\sum Y_S = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum Z_S &= 0; \quad A_3 - F_{\max} - P_2 - P_3 + T_1 \sin \alpha_1 - T_2 \sin \alpha_2 + B_3 = 0; \\ \sum m_x &= 0; \quad -F_{\max} l_1 - P_2(l_1 + l_2) - P_3(l_1 + l_2 + l_3) + \\ &\quad + T_1 \sin \alpha_1(l_1 + l_2 + l_3) - T_2 \sin \alpha_2(l_1 + l_2 + l_3) + \\ &\quad + B_3(l_1 + l_2 + l_3 + l_4) = 0; \\ \sum m_y &= 0; \quad F_{\max} R_2 - T_1 R_3 + T_2 R_3 = 0; \\ \sum m_z &= 0; \quad -T_1 \cos \alpha_1(l_1 + l_2 + l_3) - T_2 \cos \alpha_2(l_1 + l_2 + l_3) - \\ &\quad - B_1(l_1 + l_2 + l_3 + l_4) = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

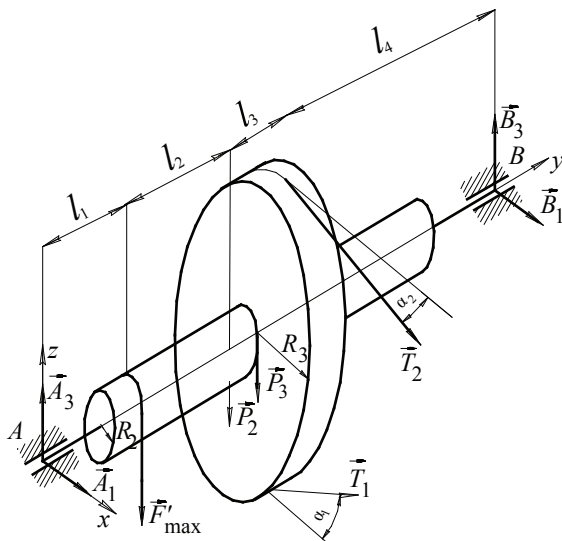


Рис. 3.10

Из уравнения (3.23) получаем  $F_{\max} R_2 - T_2 R_3 = 0$ ;  $T_2 = F_{\max} \frac{R_2}{R_3}$ .

Динамическое натяжение ветви ремня в 20 раз больше статического.

Выполним числовые расчеты.

Пусть  $l_1 = 0,3$  м;  $l_2 = 0,2$  м;  $l_3 = 0,1$  м;  $l_4 = 0,4$  м;  $l_5 = 0,2$  м;  
 $l_6 = 0,2$  м;  $R_2 = 0,1$  м;  $R_3 = 0,2$  м;  $R_4 = 0,15$  м.

Значения массы следующие:

$$m_1 = 1000 \text{ кг}; m_2 = \pi R_2^2 l_2 \rho = 3,14 \cdot (0,1)^2 \cdot 0,6 \cdot 8 \cdot 10^3 = 150,7 \text{ кг};$$

$$m_3 = \pi R_3^2 l_3 \rho = 3,14 \cdot (0,2)^2 \cdot 0,08 \cdot 8 \cdot 10^3 = 80,3 \text{ кг};$$

$$m_4 = \pi R_4^2 l_4 \rho = 3,14 \cdot (0,15)^2 \cdot 0,08 \cdot 8 \cdot 10^3 = 45,2 \text{ кг}.$$

Приведенная масса

$$m_{\text{пр}} = 0,5 \cdot \left[ 2 \cdot 1000 + 150,7 + (80,3 + 45,2) \cdot \left( \frac{0,2}{0,1} \right)^2 \right] = 1326,4 \text{ кг}.$$

Равномерное вращение

$$M_{\text{вр}} = 1000 \cdot 9,8 \cdot \frac{0,1 \cdot 0,15}{0,2} = 735 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Для подъема с ускорением принимаем  $M_{\text{вр}} = 950 \text{ Н} \cdot \text{м}.$

Обобщенная сила

$$Q = 950 \cdot \frac{0,2}{0,1 \cdot 0,15} - 1000 \cdot 9,8 = 2866,7 \text{ Н}.$$

Ускорение груза

$$a = \frac{Q}{m_{\text{пр}}} = \frac{2866,7}{1326,4} = 2,16 \text{ м/с}^2.$$

Натяжение ведомой ветви

$$T_2 = \frac{950}{0,15} - 0,5 \cdot 45,2 \cdot \frac{0,2}{0,1} \cdot 2,16 = 6235,6 \text{ Н}.$$

Натяжение ведущей ветви

$$T_1 = 2T_2 = 12471,2 \text{ Н}.$$



Статистические усилия

$$T_2^{\text{ст}} = 1000 \cdot 9,8 \cdot \frac{0,1}{0,2} = 4900 \text{ Н} ; T_1^{\text{ст}} = 2T_2^{\text{ст}} = 9800 \text{ Н}.$$

Определим опорные реакции

$$P_1 = 9800 \text{ Н} ; P_2 = 1476,9 \text{ Н} ; P_3 = 786,9 \text{ Н} ; \Phi_1 = 2160 \text{ Н}.$$

Динамические реакции:

$$A_1 = -6,96 \cdot 10^3 \text{ Н} ; A_3 = 8,62 \cdot 10^3 \text{ Н} ;$$

$$B_1 = -10,5 \cdot 10^3 \text{ Н} ; B_3 = 3,54 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Реакции при равномерном движении:

$$A_1^{\text{ст}} = -5,52 \cdot 10^3 \text{ Н} ; A_3^{\text{ст}} = 7,27 \cdot 10^3 \text{ Н} ;$$

$$B_1^{\text{ст}} = -8,28 \cdot 10^3 \text{ Н} ; B_3^{\text{ст}} = 3,16 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Полные реакции:

динамические

$$R_A = \sqrt{48,44 + 74,30} \cdot 10^3 = 11,07 \cdot 10^3 \text{ Н} ;$$

$$R_B = \sqrt{110,25 + 12,53} \cdot 10^3 = \sqrt{122,78} \cdot 10^3 = 11,08 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

статические

$$R_A^{\text{ст}} = \sqrt{30,47 + 52,85} \cdot 10^3 = \sqrt{83,32} \cdot 10^3 = 9,13 \cdot 10^3 \text{ Н} ;$$

$$R_B^{\text{ст}} = \sqrt{68,56 + 9,98} \cdot 10^3 = \sqrt{78,55} \cdot 10^3 = 8,86 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Коэффициенты динамичности (отношение динамических нагрузок к статическим):

$$K_d(T) = 1,27 ; K_d(A_1) = 1,26 ; K_d(A_3) = 1,18 ;$$

$$K_d(B_1) = 1,27 ; K_d(B_3) = 1,12.$$

Для определения режима опускания груза принимаем  $M_c = 565 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Обобщенная сила

$$Q = P_1 - M_c \frac{R_3}{R_2 R_4} = 9800 - 565 \cdot \frac{0,2}{0,1 \cdot 0,15} = 2266,7 \text{ Н}.$$

Ускорение груза

$$a_1 = \frac{2266,7}{326,4} = 6,94 \text{ м/с}^2.$$

Натяжение ветвей ремня

$$T_2 = \frac{565}{0,15} + 0,5 \cdot 45,2 \cdot 2 \cdot 6,94 = 4080,3 \text{ Н};$$

$$T_1 = 2T_2 = 8160,6 \text{ Н}.$$

Статические усилия

$$T_2^{\text{ст}} = 4900 \text{ Н}; \quad T_1^{\text{ст}} = 9800 \text{ Н}.$$

Анализ результатов приводит к следующим выводам:

- 1) статические нагрузки определяются равномерным движением и не зависят от режимов подъема или опускания груза;
- 2) при ускоренном опускании груза все динамические реакции (натяжение ремня, реакции подшипников) меньше статических. В частности, если ускорение груза при опускании  $a_1 = 7,9 \text{ м/с}^2$  ( $0,8g$ ), то натяжение ветвей ремня будет равно нулю ( $T_2 = 0$ ,  $T_1 = 0$ ).

В табл. 3.1 приведены значения динамических и статических реакций подшипников при подъеме и опускании груза и при равномерном движении.

Таблица 3.1

## Значения реакций подшипников

Реакции, Н	Динамические		Равномерное движение
	подъем	опускание	
$A_1$	$-6,96 \cdot 10^3$	$-4,28 \cdot 10^3$	$-5,5 \cdot 2 \cdot 10^3$
$A_3$	$8,62 \cdot 10^3$	$6,22 \cdot 10^3$	$7,27 \cdot 10^3$
$B_1$	$-10,5 \cdot 10^3$	$-6,42 \cdot 10^3$	$-8,28 \cdot 10^3$
$B_3$	$3,54 \cdot 10^3$	$2,88 \cdot 10^3$	$3,16 \cdot 10^3$

Полученные значения динамических реакций в дальнейшем используются для расчетов прочности.

## 3.4. Динамический расчет редуктора

Редукторы используются в приводах различных машин и механизмов для изменения крутящих моментов и частоты вращения, как правило, для уменьшения угловой скорости и увеличения вращающего момента на ведомом валу по сравнению с ведущим.

Рассмотрим горизонтальный двухступенчатый цилиндрический редуктор (рис. 3.11).

При расчете задаем величины:  $M_{\text{дв}}$  — момент двигателя;  $M_p$  — рабочий момент;  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  — число зубьев;  $m_T, m_b$  — модули тихоходной и быстроходной ступеней;  $b_T, b_b$  — ширина колес тихоходной и быстроходной ступеней.

Найти угловое ускорение ведомого вала  $\varepsilon_4$ .

В результате кинематического анализа устанавливаем связь между угловыми скоростями (ускорениями):

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{Z_4}{Z_3}, \quad \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3}, \quad \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3}.$$

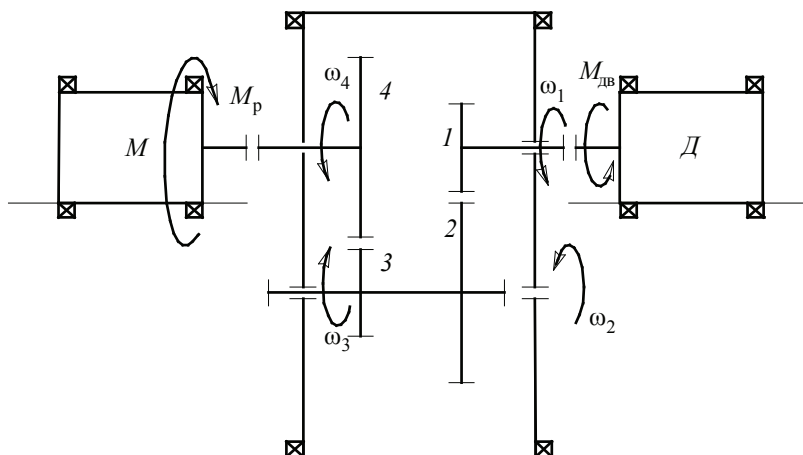


Рис. 3.11

(1 — шестерня; 2 — зубчатое колесо первой ступени; 3 — шестерня; 4 — колесо второй ступени)

При использовании принципа Даламбера механизм расчленяем на отдельные тела и рассматриваем движение каждого тела отдельно, добавляя к каждому телу силы инерции.

Рассмотрим ведущий вал (рис. 3.12).

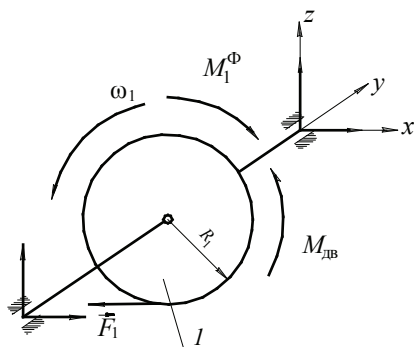


Рис. 3.12

(1 — шестерня первой ступени)

Силы инерции приводятся к паре сил с моментом

$$M_1^\Phi = J_{1Z} \varepsilon_1 = \frac{m_1 R_1^2}{2} \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \varepsilon_4 = \frac{1}{2} m_1 \frac{R_1}{R_3} R_2 R_4 \varepsilon_4.$$

Составляя сумму моментов относительно оси  $Oy$ , получаем

$$\begin{aligned} \sum m_{Oy} &= 0; \quad M_{дв} - F_1 R_1 - M_1^\Phi = 0; \\ \frac{M_{дв}}{R_1} - F_1 - \frac{1}{2} m_1 \left( \frac{R_2}{R_3} \right) R_4 \varepsilon_4 &= 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Определим для промежуточного вала (рис. 3.13) момент пар сил инерции:

$$M_2^\Phi = J_{2Z} \varepsilon_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \frac{R_4}{R_3} \varepsilon_4;$$

$$M_3^\Phi = J_{3Z} \varepsilon_3 = \frac{1}{2} m_3 R_3^2 \frac{R_4}{R_3} \varepsilon_4 = \frac{1}{2} m_3 R_3 R_4 \varepsilon_4.$$

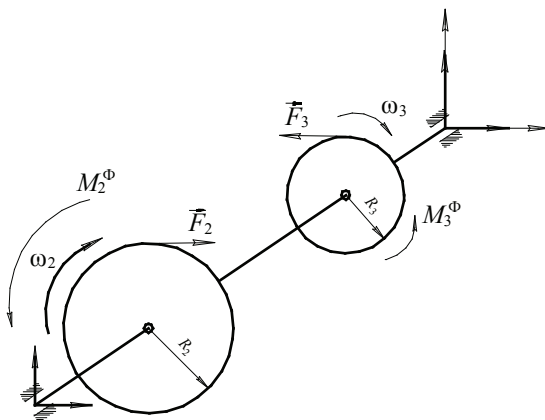


Рис. 3.13. Промежуточный вал редуктора

Сумма моментов относительно оси  $Oy$  составит

$$\begin{aligned} \sum m_y = 0 ; F_3 R_3 - F_2 R_2 + M_2^\Phi + M_3^\Phi = 0 ; \\ -F_3 \frac{R_3}{R_2} + F_2 - \frac{1}{2} m_2 \left( \frac{R_2}{R_3} \right) R_4 \varepsilon_4 - \frac{1}{2} m_3 \left( \frac{R_3}{R_2} \right) R_4 \varepsilon_4 = 0 , \end{aligned} \quad (3.25)$$

причем  $F_1 = F_2$ .

Рассмотрим ведомый вал редуктора (рис. 3.14).

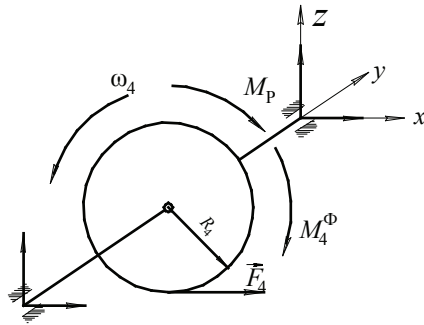


Рис. 3.14

Момент пары сил инерции составляет

$$M_4^\Phi = J_{4Z} \varepsilon_4 = \frac{1}{2} m_4 R_4^2 \varepsilon_4 . \quad (3.26)$$

Сумма моментов относительно оси  $Oy$

$$\begin{aligned} \sum m_y = 0 ; F_4 R_4 - M_p - M_4^\Phi = 0 ; \\ F_4 - \frac{M_p}{R_4} - \frac{1}{2} m_4 R_4 \varepsilon_4 = 0 , \end{aligned} \quad (3.27)$$

причем  $F_4 = F_3$ .

В уравнениях (3.24)–(3.26) неизвестные величины  $F_1, F_3, \varepsilon_4$ . Решая эту систему уравнений, получаем выражение для углового ускорения ведомого вала:

$$\frac{1}{2} \left[ (m_1 + m_2) \left( \frac{R_2}{R_3} \right)^2 + (m_3 + m_4) \right] R_4^2 \varepsilon_4 = M_{\text{дв}} \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} - M_{\text{р}}. \quad (3.28)$$

При равномерном вращении

$$\varepsilon_4 = 0 \text{ и } M_{\text{дв}} \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} - M_{\text{р}} = 0.$$

Отметим, из уравнения (3.24) можно найти касательное усилие  $F_1$ , из уравнения (3.27) —  $F_4$ , а уравнение (3.25) использовать для проверки правильности решения.

Замечание.

Для определения углового ускорения можно воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии.

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_S^e + \sum N_S^i,$$

где  $T$  — кинетическая энергия системы;  $N^l, N^i$  — мощность внешних и внутренних сил, причем  $\sum N_S^i = 0$ .

Для рассматриваемого редуктора кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \frac{m_1 R_1^2}{2} \omega_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 R_2^2}{2} \omega_2^2 + \frac{1}{2} \frac{m_3 R_3^2}{2} \omega_3^2 + \frac{1}{2} \frac{m_4 R_4^2}{2} \omega_4^2 = \frac{1}{2} J_{\text{пр}} \omega_4^2,$$

где  $J_{\text{пр}}$  — приведенный момент инерции,

$$J_{\text{пр}} = \frac{1}{2} \left[ (m_1 + m_2) \left( \frac{R_2}{R_3} \right)^2 + (m_3 + m_4) \right] R_4^2.$$

## Мощность внешних сил

$$\sum N_S^e = M_{\text{дв}} \omega_1 - M_P \omega_4 = Q \omega_4,$$

где  $Q$  — обобщенная сила,  $Q = M_{\text{дв}} \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} - M_P$ .

Подставляя величины в теорему, получаем

$$\frac{1}{2} \left[ (m_1 + m_2) \left( \frac{R_2}{R_3} \right)^2 + (m_3 + m_4) \right] R_4^2 \varepsilon_4 = M_{\text{дв}} \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} - M_P.$$

Результат совпал с уравнением (3.28).

Несмотря на некоторую «громоздкость» принципа Даламбера, при проведении инженерных расчетов он находит очень широкое применение. При использовании принципа уравнения движения записываются в форме хорошо знакомых уравнений равновесия; принцип позволяет определять динамические реакции, которые необходимы для прочностных расчетов.

В качестве примера рассмотрим горизонтальный редуктор РМ500 со следующими исходными данными.

Первая ступень:  $Z_1 = 13$ ;  $Z_2 = 86$ ;  $m = 4$  мм;

ширина колес  $b_1 = 80$  мм.

Получаем

$$R_1 = \frac{m Z_1}{2} = 26 \text{ мм}; \quad R_2 = \frac{m Z_2}{2} = 172 \text{ мм};$$

$$m_1 = \pi R_1^2 b_1 \rho = 1,4 \text{ кг}; \quad m_2 = 59,4 \text{ кг}.$$

Вторая ступень:  $Z_3 = 14$ ;  $Z_4 = 85$ ;  $m = 6$  мм;  $b_2 = 120$  мм.

Получаем

$$R_3 = 42 \text{ мм}; \quad R_4 = 255 \text{ мм}; \quad m_3 = 5,3 \text{ кг}; \quad m_4 = 196 \text{ кг}.$$



Момент на тихоходном валу  $M_p = 5200 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Принимаем  $M_{\text{дв}} = 195 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $M'_{\text{дв}} = 162,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Для  $M_{\text{дв}} = 195 \text{ Н} \cdot \text{м}$  с использованием выражения (3.28) получаем  $\varepsilon_4 = 66,3 \text{ рад/с}^2$ ; для  $M'_{\text{дв}} = 162,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$  получаем  $\varepsilon'_4 = 33,2 \text{ рад/с}^2$ . На рис. 3.15 показана зависимость углового ускорения  $\varepsilon_4$  от отношения  $\frac{M_{\text{дв}}}{M_{\text{дв.ст}}}$ , где  $M_{\text{дв.ст}}$  — момент двигателя при равномерном вращении  $M_{\text{дв.ст}} = 130 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

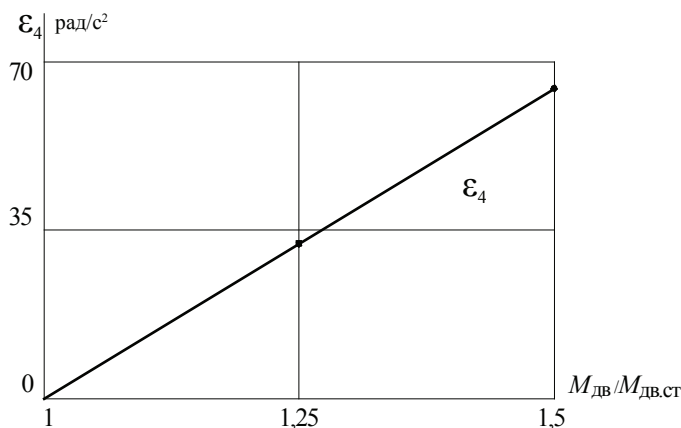


Рис. 3.15

Используя выражение (3.27), находим касательное усилие  $F_4$  на ведомом зубчатом колесе 4 (см. рис. 3.11)

$$M_{\text{дв}} = 195 \text{ Н} \cdot \text{м}; F_4 = 22,1 \cdot 10^3 \text{ Н};$$

$$M'_{\text{дв}} = 162,5 \text{ Н} \cdot \text{м}; F'_4 = 21,23 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Учитывая, что при равномерном вращении  $F_4 = 20,4 \cdot 10^3$  Н, определяем коэффициент динамичности

$$M_{\text{дв}} = 195 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad K_{\text{д}} = \frac{F_{4\text{дин}}}{F_{4\text{ст}}} = 1,08;$$

$$M_{\text{дв}} = 162,5 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad K_{\text{д}} = \frac{F'_{4\text{дин}}}{F_{4\text{ст}}} = 1,04.$$

На рис 3.16 показана зависимость коэффициента динамичности  $K_{\text{д}}(F_4)$  от отношения  $M_{\text{дв}}/M_{\text{дв.ст}}$ .

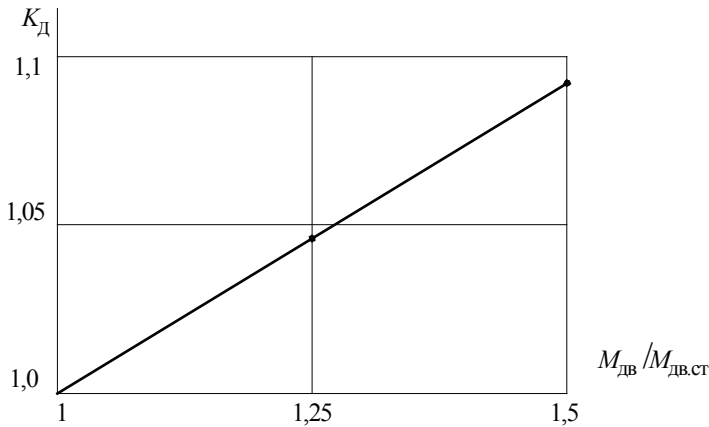


Рис. 3.16

С использованием выражения (3.28) определяем динамическое усилие на ведущей шестерне

$$M_{\text{дв}} = 195 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad F_1 = 7,452 \cdot 10^3 \text{ Н};$$

$$M_{\text{дв}} = 162,5 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad F'_1 = 7,476 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Отметим, что при равномерном вращении ( $\varepsilon_4 = 0$ ) усилие  $F_1 = 7,5 \cdot 10^3$  Н и коэффициент динамичности несколько меньше единицы ( $K_d \approx 0,99$ ), что соответствует, например, характеру динамической реакции при ускоренном опускании груза на платформе (явление невесомости).

Замечания.

1. В данном примере моменты инерции зубчатых колес вычислены как моменты инерции сплошных дисков  $\left( J_z = \frac{mR^2}{2} \right)$ .

Существующие программные продукты, например ANSYS, позволяют точно вычислять моменты инерции тел сложной формы. Представляет несомненный интерес точное вычисление моментов инерции зубчатых колес и оценка влияния погрешности вычисления на точность результатов.

2. Полезно вычислить моменты инерции валов, на которые насажены зубчатые колеса, и оценить влияние этих массовых характеристик на точность результатов.

3. Полезно проанализировать различные динамические режимы работы редукторов (влияние частоты переходных процессов на долговечность основных деталей редуктора).

### 3.5. Пружинный колодочный тормоз. Определение времени торможения и числа оборотов при торможении

---

Тормоза находят широкое применение в технике. Например, в краностроении тормоза используются в механизмах подъема груза и передвижения кранов и тележек. Наибольшее распространение для торможения крановых механизмов получили колодочные тормоза, момент торможения которых не меняется с течением времени. В других областях техники, например,

для быстрого торможения больших маховиков применяются электрические тормоза, момент сопротивления которых зависит от угловой скорости вращения.

Расчетная схема колодочного тормоза показана на рис. 3.17.

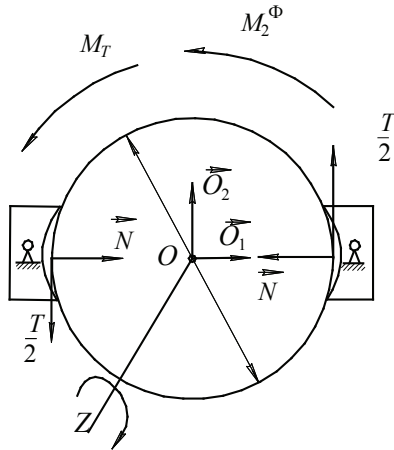


Рис. 3.17

На рисунке показано:  $T$  — тормозное усилие, создаваемое колодками на поверхности трения;  $N$  — нормальная реакция колодки;  $M_T$  — тормозной момент, принимаемый постоянным.

Рассмотрим вращение шкива и используем принцип Даламбера, добавим пару сил инерции с моментом:

$$M_2^\Phi = J\varepsilon = J \frac{d\omega}{dt}.$$

Согласно принципу Даламбера

$$\sum m_z = 0; \quad -M_T - M_z^\Phi = 0;$$

$$-M_T - J \frac{d\omega}{dt} = 0. \quad (3.29)$$

Пусть маховик в рассматриваемый момент времени имел угловую скорость  $\omega_0$ . Определить, через какой промежуток времени остановится маховик и число оборотов, которое маховик сделает за этот промежуток времени.

Разделяя переменные в уравнении (3.29)  $d\omega = -\frac{M_T}{J} dt$  и интегрируя, получаем время до остановки маховика

$$\int_{\omega_0}^0 d\omega = -\frac{M_C}{J} \int_0^T dt, \quad T = \frac{J}{M_T} \omega_0.$$

Для определения числа оборотов до остановки воспользуемся заменой

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi}.$$

Разделяя переменные  $\omega d\omega = -\frac{M_T}{J} d\varphi$ , интегрируя  $\int_{\omega_0}^0 \omega d\omega = -\frac{M_T}{J} \int_0^\varphi d\varphi$ , учитывая  $\varphi = 2\pi N$ , получаем число оборотов маховика до остановки:

$$N = \frac{J \omega_0^2}{4\pi M_T}.$$

Выполним расчет электрического тормоза.

Электрический тормоз состоит из двух диаметрально расположенных полюсов, несущих обмотку, питаемую постоянным током. Токи, индуцируемые в массе маховика при его движении мимо полюсов, создают тормозящий момент  $M_T$ , пропорциональный скорости на ободе маховика  $M_T = K \frac{D}{2} \omega$ , где  $K$  — коэффициент, зависящий от магнитного потока и размеров

маховика. Через какой промежуток времени остановится маховик, вращающийся с угловой скоростью —  $\omega_0$  и сколько оборотов сделает маховик за это время?

При использовании принципа Даламбера  $\sum m_z \ddot{z} = 0$  получаем

$$-\left(M_2 + K \frac{D}{2} \omega\right) - M_z^\Phi = 0,$$

где  $M_z^\Phi = J\varepsilon = J \frac{d\omega}{dt}$ . Момент  $M_2$  от трения в подшипниках можно считать постоянным;  $D$  — диаметр маховика;  $J$  — момент инерции его относительно оси вращения.

Учитывая значение момента пары сил инерции, получаем уравнение

$$J \frac{d\omega}{dt} = -\left(M_2 + K \frac{D}{2} \omega\right). \quad (3.30)$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\int_{\omega_0}^0 \frac{d\omega}{M_2 + K \frac{D}{2} \omega} = -\frac{1}{J} \int_0^T dt.$$

Время до остановки

$$T = \frac{2J}{KD} \ln \left( 1 + \frac{KD\omega_0}{2M_2} \right).$$

Воспользовавшись заменой в уравнении (3.30), получаем

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi}.$$

Разделяя в уравнении (3.30) переменные и интегрируя, находим

$$\int_{\omega_0}^0 \frac{\omega d\omega}{M_2 + \frac{KD}{2} \omega} = -\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{J}.$$

Получаем число оборотов до остановки маховика (с учетом  $\varphi = 2\pi N$ )

$$N = \frac{J}{\pi KD} \left[ \omega_0 - \frac{2M_2}{KD} \ln \left( 1 + \frac{KD\omega_0}{2M_2} \right) \right].$$

Замечание. Представляет практический интерес проведение инженерного анализа и установление зависимостей найденных величин ( $T, N$ ) от основных параметров  $K, D, M_2, \omega_0$ .

### 3.6. Движение вагона на закруглении железнодорожного пути

---

Определим, какова должна быть величина возвышения  $e$  наружного рельса на закруглении железнодорожного пути радиуса  $r$ , чтобы вагон, едущий со скоростью  $V$  по этому закруглению, оказывал одинаковое давление на оба рельса, расстояние между рельсами  $b$  (рис. 3.18).

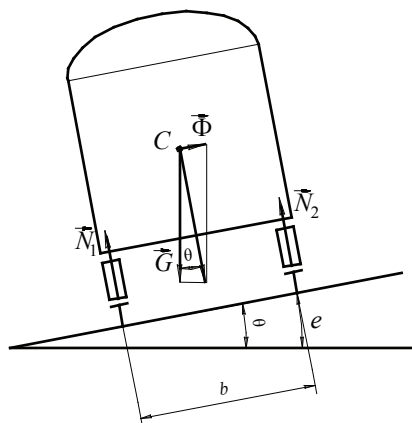


Рис. 3.18

Рассмотрим движение вагона, на который действует силы  $\vec{G}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ , и добавим силу инерции  $\vec{\Phi}$ . При равномерном движении вагона  $\Phi = ma = ma_n = m \frac{V^2}{r} = \frac{G}{g} \frac{V^2}{r}$ . Реакции на оба рельса будут равны тогда, когда равнодействующая сил  $\vec{G}$  и  $\vec{\Phi}$  перпендикулярна плоскости полотна.

Из треугольника имеем

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\Phi}{G} = \frac{GV^2}{grG} = \frac{V^2}{gr}.$$

Необходимое возвышение  $e = b \sin \theta$ . На обычных железно-дорожных путях угол  $\theta$  бывает очень небольшим, так что для него можно принять  $\sin \theta = \operatorname{tg} \theta$ . В таком случае найдем величину возвышения

$$e = b \frac{V^2}{gr}.$$

Или, зная  $e$ , находим

$$V = \sqrt{\frac{egr}{b}}.$$

Эти выражения можно также применять для определения возвышения на закругленных безрельсовых дорогах.

### 3.7. Равномерное вращение кольца

Определить окружное растягивающее усилие  $N$  [Н/м] на единицу длины кольца, возникающее в равномерно вращающемся круглом кольце с одинаковым поперечным сечением



$S$  и средним радиусом  $r$  (рис. 3.19, *a*), если линейная скорость точек кольца равна  $V$ .

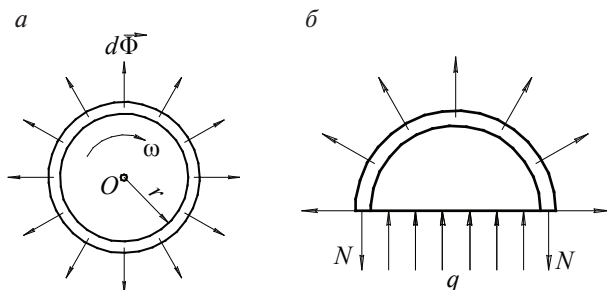


Рис. 3.19

Пусть весом единицы длины кольца будет  $q [\text{Н/м}]$  — интенсивность силы тяжести (единица длины в тангенциальном и осевом направлениях). В таком случае интенсивность равномерно распределенной силы инерции (нормальной составляющей), возникающей вследствие вращения, будет равна  $\frac{q V^2}{g r}$  и направлена вдоль радиуса от центра кольца (рис. 3.19, *a*).

На диаметрально противоположную поверхность кольца действует давление  $\frac{q v^2}{g r}$ . Оно уравнивается силами  $N$ , растягивающими материал кольца в направлении, перпендикулярном образующей. Условие динамического равновесия половины кольца единичной длины  $\frac{q}{g} \frac{v^2}{r} \cdot 2r = 2N$  (рис. 3.19, *б*), которое получено с по-

мощью принципа Даламбера для части кольца. Отсюда окружное растягивающее усилие на единицу длины кольца определяется после добавленных сил инерции из уравнения равновесия:

$$N = \frac{q}{g} \frac{V^2}{r} \cdot r = \frac{q V^2}{g}.$$

Если  $S [м^2]$  — толщина стенки кольца для единицы длины в осевом направлении, являющаяся площадью поперечного сечения, то соответствующее растягивающее напряжение

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{qV^2}{Sg} = \gamma \frac{V^2}{g},$$

где  $\gamma$  — вес единицы объема материала кольца,  $Н/м^3$ ,  $\gamma = \frac{q}{S}$ .

Из полученного выражения следует, что напряжение во вращающемся кольце увеличивается пропорционально квадрату линейной скорости. Напряжение, вызванное силами инерции, имеет большое значение при конструировании высокоскоростных машин.

Зная ориентировочные значения допускаемых напряжений (например, сталь углеродистая, конструкционная в машиностроении  $[\sigma] = 60,0...250,0$  МПа; сталь легированная, конструкционная в машиностроении  $[\sigma] = 100,0...400,0$  и выше), можно определить предельную линейную скорость точек кольца. Учитывая, что  $V = \omega r$ , можно расширить анализ и определить предельную угловую скорость вращения с учетом радиуса кольца.

Авторы надеются, что изложение теоретической части метода, разработанные примеры показывают эффективность применения принципа Даламбера для анализа движения механических систем с одной и несколькими степенями свободы. Приведенные решения инженерных задач будут полезны при выполнении многочисленных динамических расчетов, будут полезны при конструировании новых механизмов и машин.

Авторы благодарны научному редактору Т. В. Дружининой, надеются, что пособие будет полезно читателям, и с благодарностью примут все замечания.

---

## Вопросы для самопроверки

---

1. Как направлена сила инерции материальной точки, движущейся прямолинейно и замедленно?
2. Как направлена сила инерции материальной точки при равномерном движении по криволинейной траектории?
3. К какому простейшему виду приводятся силы инерции точек твердого тела?
4. Чему равны главный вектор и главный момент сил инерции для различных видов движения твердого тела?
5. С каким ускорением должен двигаться лифт вниз, чтобы человек находящийся в нем, не оказывал давления на пол, т. е. был в состоянии невесомости?
6. Как формируется принцип Даламбера для механической системы?
7. Учитываются ли внутренние силы в принципе Даламбера для механической системы?
8. На какие колеса (передние или задние) оказывает большее давление автомобиль:
  - а) при ускоренном движении;
  - б) при торможении?

---

## Рекомендуемый библиографический список

---

Бутенин Н. В. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Д. Меркин. — СПб. : Лань, 2004. — 736 с.

Денисов Ю. В. Теоретическая механика / Ю. В. Денисов, Н. А. Клиньских. — Екатеринбург : УрФУ, 2013. — 474 с.

Лойцянский Л. Г. Курс теоретической механики : в 2 т. / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. — М. : Наука, 1983. — Т. 2. — 640 с.

Митюшов Е. А. Теоретическая механика / Е. А. Митюшов, С. А. Берестова. — М. : Академия, 2006. — 320 с.

Никитин Н. Н. Курс теоретической механики / Н. Н. Никитин. — М. : Высшая школа, 1990. — 608 с.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. — М. : Наука, 2005. — 416 с.

Тимошенко С. Инженерная механика / С. Тимошенко, Д. Юнг. — М. : Машгиз, 1960. — 508 с.

Яблонский А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. — СПб. : Лань, 2006. — 768 с.

---

# Оглавление

---

Введение .....	3
Глава 1. Принцип Даламбера .....	5
1.1. Сила инерции материальной точки. Приведение сил инерции точек твердого тела к простейшему виду .....	5
1.2. Принцип Даламбера для точки и механической системы .....	9
1.3. Примеры использования принципа Даламбера .....	15
Глава 2. Случаи применения принципа Даламбера .....	35
2.1. Динамические реакции подшипников при вращении тела вокруг неподвижной оси .....	35
2.2. Анализ движения механической системы с двумя степенями свободы .....	43
Глава 3. Динамический анализ движения реальных объектов — инженерные задачи .....	48
3.1. Движение автомобиля .....	48
3.2. Качение колеса по криволинейной поверхности, влияние неровности дороги .....	58
3.3. Лебедка для подъема груза. Определение ускорения груза, динамических реакций .....	60
3.4. Динамический расчет редуктора .....	73
3.5. Пружинный колодочный тормоз. Определение времени торможения и числа оборотов при торможении .....	81
3.6. Движение вагона на закруглении железнодорожного пути .....	85
3.7. Равномерное вращение кольца .....	86
Вопросы для самопроверки .....	89
Рекомендуемый библиографический список .....	90

*Учебное издание*

**Берестова** Светлана Александровна  
**Денисов** Юрий Викторович

**ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА  
ИНЖЕНЕРНЫЕ ЗАДАЧИ**

Редактор И. В. Меркурьева  
Верстка О. П. Игнатьевой

Подписано в печать 12.04.2016. Формат 60×84/16.  
Бумага писчая. Плоская печать. Гарнитура Newton.  
Уч.-изд. л. 3,7. Усл. печ. л. 5,3. Тираж 155 экз.  
Заказ 52

Издательство Уральского университета  
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ  
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5  
Тел.: 8(343)375-48-25, 375-46-85, 374-19-41  
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ  
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4  
Тел.: 8(343) 350-56-64, 350-90-13  
Факс: 8(343) 358-93-06  
E-mail: press-urfu@mail.ru



